ลิมิตและฟังก์ชัน

ฟังก์ชันมีหลายรูปแบบ ในบทนี้จะพิจารณาถึงค่าที่เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งของฟังก์ชัน แต่ไม่ใช่ค่าของฟังก์ชัน รวมถึงการตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่ค่าหรือช่วงต่างๆ

“ฟังก์ชัน” คือ ความสัมพันธ์จากเซตหนึ่ง(โดเมน) ไปยังอีกเซตหนึ่ง(โคโดเมน ไม่ใช่เรนจ์) โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน ฟังก์ชันเป็นพื้นฐานของทุกสาขาของคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เป็นข้อมูลเชิงปริมาณ

“กฎ” ที่นิยามฟังก์ชันอาจเป็นสูตร, ความสัมพันธ์(คณิตศาสตร์) หรือเป็นแค่ตารางที่ลำดับผลลัพธ์กับสิ่งที่นำเข้า ลักษณะเฉพาะที่สำคัญของฟังก์ชันคือจะมีผลลัพธ์เหมือนเดิมตลอดเมื่อให้สิ่งนำเข้าเหมือนเดิม เรียกผลลัพธ์ว่า **ค่าของฟังก์ชัน(Value)**

ชนิดของฟังก์ชันธรรมดาเกิดจากสิ่งนำเข้าและค่าของฟังก์ชันเป็นตัวเลขทั้งคู่ ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันมักจะเขียนในรูปสูตรและจะได้ค่าของฟังก์ชันมาทันทีเพียงแทนที่สิ่งนำเข้าในสูตร เช่น

$$f(x) = x^2$$

ฟังก์ชันไม่ได้จำกัดอยู่แค่การคำนวณด้วยตัวเลขเท่านั้น และไม่ได้จำกัดอยู่แค่การคำนวณด้วยแนวคิดของคณิตศาสตร์เกี่ยวกับฟังก์ชัน เป็นแนวคิดโดยทั่วไปและไม่ได้จำกัดอยู่แค่สถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวเลขเท่านั้น แน่นอนว่าฟังก์ชันเชื่อมโยง **"โดเมน"** (เซตของสิ่งนำเข้า) เข้ากับ **"โคโดเมน"** (เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้) ดังนั้นสมาชิกแต่ละตัวของโดเมนจะจับคู่กับสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของโคโดเมนเท่านั้น **ฟังก์ชันนั้นนิยามเป็นความสัมพันธ์ที่แน่นอน**

<u>ลิมิตของฟังก์ชัน</u>

พิจารณาฟังก์ชัน f(x) = 2x – 1 เมื่อลองให้ค่าของ x เข้าใกล้ 2 โดยพิจารณาจากตาราง

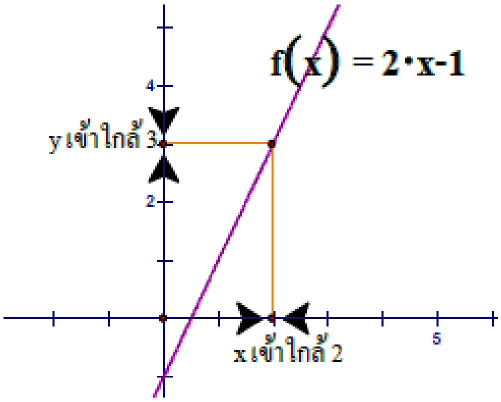
x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ (x < 2)

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999
f(x)	2.8	2.98	2.998	2.9998	2.99998	2.999998

x เข้าใกล้ 2 ทางขวามือ (x > 2)

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001
f(x)	3.2	3.02	3.002	3.0002	3.00002	3.000002

ยิ่งค่า x เข้าใกล้ 2 เท่าใด ค่าของ f(x) ยิ่งเข้าใกล้ 3 ตามไปด้วย



พิจารณาจากกราฟ จะเห็นว่า ยิ่ง x เข้าใกล้ 2 เมื่อใด ค่า y (f(x)) ก็ยิ่งเข้าใกล้ 3 เท่านั้น เรียกว่า **"ลิมิตของฟังก์ชัน f(x) = 2x – 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 3"**

เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ หรือ $\lim_{x\to 2} 2x - 1 = 3$

จากตัวอย่าง เราทราบว่า ในการหาลิมิต เราจะหาใน 2 กรณีคือ กรณีที่ x เข้าใกล้ค่าใดสักค่าทางขวามือ และซ้ายมือ

นิยาม : ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย เท่ากับ L ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา เท่ากับ L ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

จากนิยามดังกล่าว เราจะเรียกลิมิตดังล่าวว่า **ลิมิตด้านเดียว(one side limits)** และกรณีที่เป็นลักษณะ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ จะเรียกว่า ลิมิตสองข้าง(two side limit) ก็ต่อเมื่อ

$$lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

ตัวอย่างที่ 1 $f(x) = \frac{|x-a|}{x-a}$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

- พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{|x-a|}{x-a}$ เมื่อให้ค่า x เข้าใกล้ 1 โดยพิจารณาจากตาราง

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้ายมือ ($x < 1$)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
f(x)	-1	-1	-1	-1	-1	-1

จะได้ว่า $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวามือ ($x > 1$)

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
f(x)	1	1	1	1	1	1

จะได้ว่า $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x)$ ไม่มีลิมิต *(Ans)*

- พิจารณาจากนิยามค่าสัมบูรณ์

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-(x-a)}{x-a} = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{(x-a)}{x-a} = 1$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $lim_{x \to 1} f(x)$ ไม่มีลิมิต *(Ans)*

Step Function (ฟังก์ชันขั้นบันได)

$$f(x)\begin{cases} \dots ; x \geq a \\ \dots ; x < a \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 2 $f(x) = \begin{cases} x+1; x \leq 2 \\ 2; x > 2 \end{cases}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2

- พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อให้ค่า x เข้าใกล้ 2 โดยพิจารณาจากตาราง

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ ($x < 2$)

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999
f(x)	2.9	2.99	2.999	2.9999	2.99999	2.999999

จะได้ว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางด้านขวามือ ($x > 2$)

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001
f(x)	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

จะได้ว่า $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

$$\therefore \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

ดังนั้น $lim_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีลิมิต *(Ans)*

- พิจารณาจากนิยามค่าสัมบูรณ์

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+1 = 3$$

$$\lim_{x\to x^+} f(x) = 2$$

ดังนั้น $lim_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีลิมิต *(Ans)*

การหาลิมิตโดยใช้ทฤษฎีลิมิต

เมื่อ a, L, m เป็นจานวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจานวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to b} f(x) = M$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับใดๆ
4. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$ โดยที่ C เป็นค่าคงตัวใดๆ
5. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$
6. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$
7. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = LM$
8. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ โดยที่ M ไม่เท่ากับ 0
9. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับใดๆ
10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \epsilon I^+ - \{1\}$

การหาลิมิตในรูปที่ยังไม่กำหนด (Indeterminate form)

คืออยู่ในลักษณะ $\frac{0}{0}, 0^0, 0^\infty, \infty, -\infty, \infty^0, \frac{\infty}{\infty}, 1 \cdot \infty$

ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$ ลิมิตยังไม่สามารถบอกได้ จะต้องจัดรูปใหม่ดังนี้

1. จัดรูปตัวส่วนไม่ให้เท่ากับ 0 โดยการ

   1.1 แยกตัวประกอบ แล้วทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

   1.2 ใช้คู่สังยุค (Conjugate) จัดรูปให้เป็น $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

   1.3 กรณีเป็นลักษณะของผลบวกกำลังสาม หรือ ผลต่างกำลังสาม ให้ใช้เอกลักษณ์

   1.3.1 $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

   1.3.2 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

2. นำตัวแปรกำลังสูงสุด หารทั้งเศษและส่วน แยกเศษส่วนย่อย แล้วทอนให้เป็นอย่างต่ำ แล้วใช้ทฤษฎีลิมิต

3. ใช้หลักการอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เรียกวิธีนี้ว่า L' Hospital's Rule (จะกล่าวในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน)

ตัวอย่างที่ 3 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีลิมิต

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+4) &= \lim_{x\to 5}2x^2-\lim_{x\to 5}3x+\lim_{x\to 5}4\\ &= 2\lim_{x\to 5}x^2-3\lim_{x\to 5}x+\lim_{x\to 5}4\\ &= 2(5)^2-3(5)+4\\ &= 39\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 5}(2x^2-3x+4)$ เท่ากับ 39 ***(Ans)***

ตัวอย่างที่ 4 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีลิมิต

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} &= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)}\\ &= \frac{\lim_{x\to -2}x^3+\lim_{x\to -2}2x^2-\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}5-\lim_{x\to -2}3}\\ &= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)}\\ &= -\frac{1}{11}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$ เท่ากับ $-\frac{1}{11}$ ***(Ans)***

ตัวอย่างที่ 5 จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีลิมิต

$$\lim_{x\to 2}(x^2-1)^4 = \left[\lim_{x\to 2} x^2 - 1\right]^4$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1\right]^4$$

$$= [4-1]^4$$

$$= 3^4 = 81$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}(x^2-1)^4$ เท่ากับ 81 ***(Ans)***

ตัวอย่างที่ 6 $lim_{x\to -3}\left[\frac{x^2-9}{x+3}\right]$

เมื่อลองแทนค่า *-3* ลงไป พบว่าอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็น indeterminate form ซึ่งยังไม่สามารถสรุปลิมิตได้ เราจึงจะจัดนิพจน์ โดยการแยกตัวประกอบแล้วทอนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

$$\lim_{x\to -3}\left[\frac{x^2-9}{x+3}\right] = \lim_{x\to -3}\left[\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to -3}(x-3)$$

$$= -3-3 = -6$$

ดังนั้น $lim_{x\to -3}\left[\frac{x^2-9}{x+3}\right]$ เท่ากับ -6 ***(Ans)***

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

เมื่อลองแทนค่า -3 ลงไป พบว่าอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็น indeterminate form ซึ่งยังไม่สามารถสรุปลิมิตได้ จึงคูณด้วยสังยุคทั้งเศษและส่วน เพื่อจัดรูปให้เป็นผลต่างกำลังสอง

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-(3)^2}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

ดังนั้น $lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ เท่ากับ $\frac{1}{6}$ <u>*(Ans)*</u>

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$

ในตัวอย่างข้อนี้ จะจัดตัวเศษให้สามารถทอนระหว่างเศษและส่วนได้ โดยใช้ผลบวกกำลังสาม

$$lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{x^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1$$

$$= 1-1+1 = 1$$

ดังนั้น $lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1}$ เท่ากับ 1 <u>*(Ans)*</u>

<u>*ตัวอย่างที่ 9*</u> $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$

ให้ $\sqrt[3]{x+8}=t$ และเมื่อ $x\to 0$

$x+8 = t^3$ $t^3-8\to 0$

$x=t^3-8$ $t\to 2$

แทนค่ากลับคืน

$$\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\frac{t-2}{t^3-8}$$

$$=\frac{t-2}{(t-2)(t^2+2t+4)}$$

$$=\frac{1}{(t^2+2t+4)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} = \lim_{t\to 2}\frac{1}{(t^2+2t+4)}$$

$$=\frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

ดังนั้น $lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ เท่ากับ $\frac{1}{12}$ <u>*(Ans)*</u>

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ และ $lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$
จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{\sin^2 3x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{sin^2 3x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^3 2x}{8x^3}\cdot 8x^3\cdot\frac{9x^2}{\sin^2 3x}\cdot\frac{1}{9x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{8x}{9}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3\cdot\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2$$

$$= \frac{8}{9}\lim_{x\to 0} x\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^3\cdot\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2$$

$$= \frac{8}{9}\lim_{x\to 0} x\cdot\left(\frac{sin 2x}{2x}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{sin 3x}\right)^2$$

$$= \frac{8}{9}\cdot 0\cdot (1)^3\cdot (1)^2 = 0$$

ดังนั้น $lim_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{sin^2 3x}$ เท่ากับ *0* ***(Ans)***