



NPRU

Nakhon Pathom

Rajabhat University

ลิมิตและฟังก์ชัน

สาขาอุตสาหกรรมศิลป์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



“ฟังก์ชัน” คือ ความสัมพันธ์จากเซตหนึ่ง (โดเมน) ไปยังอีกเซตหนึ่ง (โคโดเมนไม่ใช่เรนจ์) โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน

“กฎ” ที่นิยามฟังก์ชันอาจเป็นสูตร, ความสัมพันธ์(คณิตศาสตร์) หรือเป็นแค่ตารางที่ลำดับผลลัพธ์กับสิ่งที่นำเข้า ลักษณะเฉพาะที่สำคัญของฟังก์ชันคือจะมีผลลัพธ์เหมือนเดิมตลอดเมื่อให้สิ่งนำเข้าเหมือนเดิม เรียกผลลัพธ์ว่า **ค่าของฟังก์ชัน(Value)**



ฟังก์ชันมักจะเขียนในรูปสูตรและจะได้ค่าของฟังก์ชันมาทันทีเพียง
แทนที่สิ่งนำเข้าไปในสูตร เช่น

$$f(x) = x^2$$

ฟังก์ชันไม่ได้จำกัดอยู่แค่การคำนวณด้วยตัวเลขเท่านั้น และไม่ได้
จำกัดอยู่แค่การคำนวณด้วย แนวคิดของคณิตศาสตร์เกี่ยวกับฟังก์ชัน เป็น
แนวคิดโดยทั่วไปและไม่ได้จำกัดอยู่แค่สถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข
เท่านั้น



ลิมิตของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ เมื่อลองให้ค่าของ x เข้าใกล้ 2 โดยพิจารณาจาก

x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายมือ ($x < 2$)

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999
$f(x)$	2.8	2.98	2.998	2.9998	2.99998	2.999998

x เข้าใกล้ 2 ทางขวามือ ($x > 2$)

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001
$f(x)$	3.2	3.02	3.002	3.0002	3.00002	3.000002

ยิ่งค่า x เข้าใกล้ 2 เท่าใด ค่าของ $f(x)$ ยิ่งเข้าใกล้ 3 ตามไปด้วย

เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 1 = 3$



นิยาม : ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย เท่ากับ L ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา เท่ากับ L ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

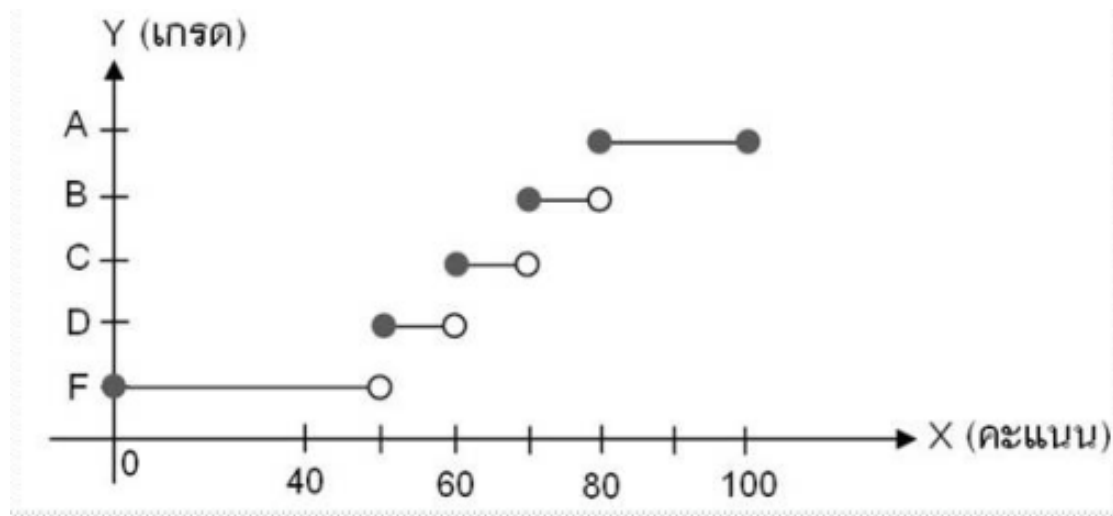
จากนิยามดังกล่าว เราจะเรียกลิมิตดังกล่าวว่า **ลิมิตด้านเดียว(one side limits)** และกรณีที่
เป็นลักษณะ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะเรียกว่า ลิมิตสองข้าง(two side limit) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



Step Function (ฟังก์ชันขั้นบันได)

$$f(x) \begin{cases} \dots; x \geq a \\ \dots; x < a \end{cases}$$





การหาขีดจำกัดโดยใช้ทฤษฎีขีดจำกัด

เมื่อ a, L, m เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = M$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับใดๆ

4. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$



NPRU

Nakhon Pathom
Rajabhat University

การหาขีดจำกัดโดยใช้ทฤษฎีขีดจำกัด

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LM$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{โดยที่ } M \text{ ไม่เท่ากับ } 0$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n \quad \text{โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนนับใดๆ}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad \text{เมื่อ } n \in I^+ - \{1\}$$



การหาขีดจำกัดในรูปที่ยังไม่กำหนด (Indeterminate form)

คืออยู่ในลักษณะ $\frac{0}{0}, 0^0, 0^\infty, \infty, -\infty, \infty^0, \frac{\infty}{\infty}, 1 \cdot \infty$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}$ ขีดจำกัดยังไม่สามารถบอกได้ จะต้องจัดรูปใหม่ดังนี้

1. จัดรูปตัวส่วนไม่ให้เท่ากับ 0 โดยการ

1.1 แยกตัวประกอบ แล้วทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

1.2 ใช้คู่สังยุค (Conjugate) จัดรูปให้เป็น $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

1.3 กรณีเป็นลักษณะของผลบวกกำลังสาม หรือ ผลต่างกำลังสาม ให้ใช้เอกลักษณ์

$$1.3.1 \ x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

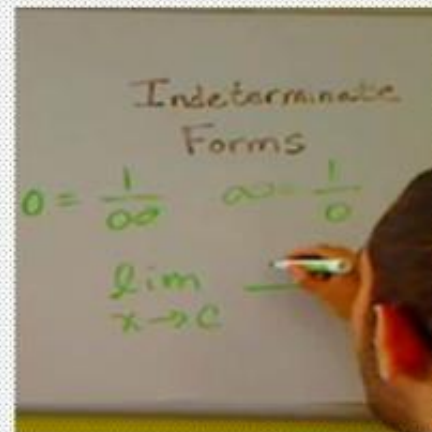
$$1.3.2 \ x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$



การหาขีดจำกัดในรูปที่ยังไม่กำหนด (Indeterminate form)

2. นำตัวแปรกำลังสูงสุด หารทั้งเศษและส่วน แยกเศษส่วนย่อย แล้ว
ทอนให้เป็นอย่างต่ำ แล้วใช้ทฤษฎีขีดจำกัด

3. ใช้หลักการอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เรียกวิธีนี้ว่า L' Hospital's Rule
(จะกล่าวในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน)





ตัวอย่าง จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีลิมิต

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \rightarrow 5} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 5} 3x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \\ &= 2(5)^2 - 3(5) + 4 \\ &= 39\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$ เท่ากับ 39 (Ans)



ตัวอย่าง จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right]$

เมื่อลองแทนค่า -3 ลงไป พบว่าอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งเป็น indeterminate form ซึ่งยังไม่สามารถสรุปลิมิตได้
เราจึงจะจัดนิพจน์ โดยการแยกตัวประกอบแล้วทอนเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right] &= \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) \\ &= -3 - 3 = -6\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^2 - 9}{x + 3} \right]$ เท่ากับ -6 (Ans)



NPRU

Nakhon Pathom
Rajabhat University

ในบทนี้ให้นักศึกษาไปศึกษาและค้นคว้าเพิ่มเติมพร้อม
ทั้งหาโจทย์แบบฝึกหัดมาส่งคนละ 5 ข้อ เขียนลงในกระดาษ
รายงานขนาด A4 เท่านั้น

THE END.