NPRU

Nakhon Pathom

Rajabhat University

ฟังก์ชันต่อเนื่อง (CONTINUOUS FUNCTION)

ฟังก์ชันต่อเนื่อง (CONTINUOUS FUNCTION)

คือ ฟังก์ชันที่มีการเปลี่ยนแปลงค่า Input เพียงเล็กน้อย ค่า Output ก็จะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อย

ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงค่า Input เพียงเล็กน้อย แล้วค่า Output ที่ได้มีค่าเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมากจะเรียก ฟังก์ชั่นนั้นว่า **ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous function)**

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (CONTINUITY OF FUNCTION)

นิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจานวนจริง f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x=a ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(a)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(a)$

หมายเหตุ ถ้าขาดสมบัติเพียงข้อเดียวถือว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ x=a

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = 4x + 3$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ x=3 หรือไม่ พิจารณานิยามทั้ง 3 ข้อ

1. $f(3) = 4(3) + 3 = 15$
2. $\lim_{x\to 3} f(3) = \lim_{x\to 3} 4x + \lim_{x\to 3} 3$
   $= 4(3) + 3$
   $= 15$
3. $f(3) = \lim_{x\to 3} f(3)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x=3

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1. ฟังก์ชันพหุนาม$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ หรือ $a \in R$

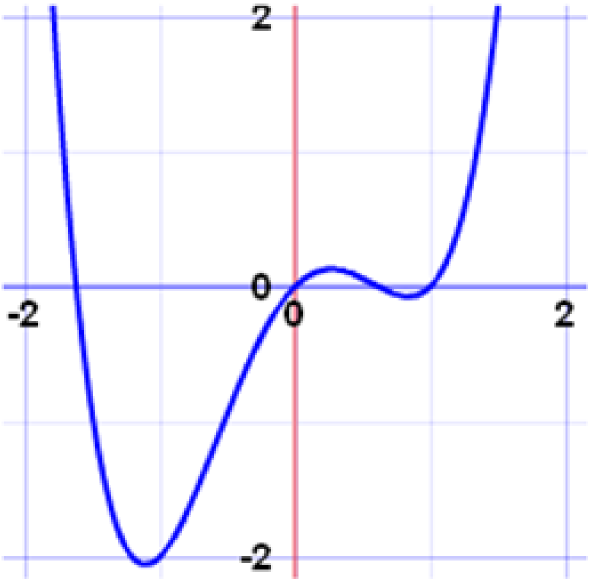
2. เมื่อ $p(x)$ และ $q(a)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ เมื่อ $a \in R$ โดยที่ $q(a) \neq 0$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

3. ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x=a และ g(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ ที่ x=f(a) แล้ว gof เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องที่ x=a

4. ถ้า $f(x)$และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆแล้ว $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ และ $cf(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ และ $\frac{f(x)}{g(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ เมื่อ $g(a) \neq 0$

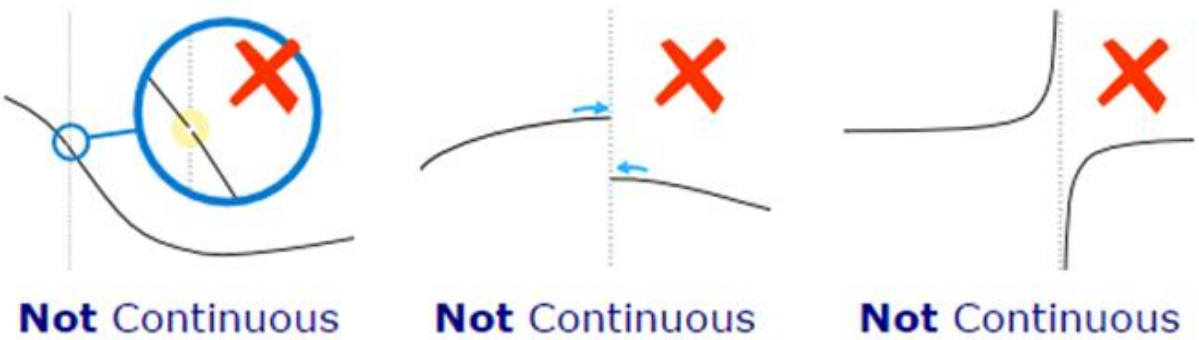
การพิจารณาโดยวิธีการเขียนกราฟ



รูปที่ 1 กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง

การพิจารณาโดยวิธีการเขียนกราฟ

เมื่อนำคำตอบของฟังก์ชันมาเขียนกราฟ จะสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ ดังภาพที่ 1 ถ้านำคำตอบของฟังก์ชันมาเขียนกราฟแล้วเส้นของกราฟมีช่องว่างไม่เป็นเส้นเดียวกันจะเรียกว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องดังรูปที่ 2

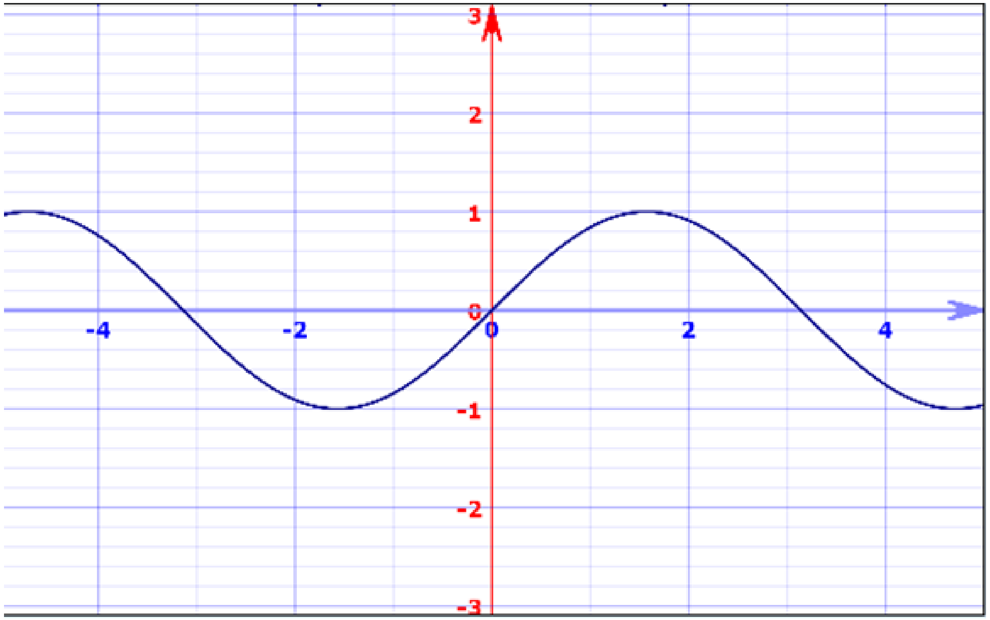


รูปที่ 2 กราฟของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 2 f(x)=sinx จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ โดยการเขียนกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
sinx	0.96	0.76	-0.14	-0.91	-0.84	0	0.84	0.91	0.14	-0.76	-0.96

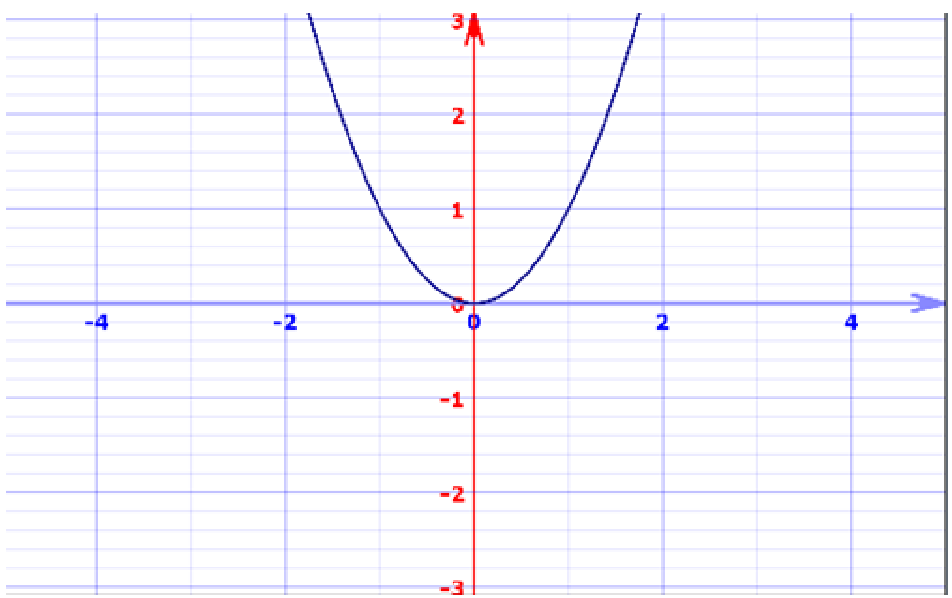
นำค่ามาเขียนกราฟ



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า f(x)=sinx เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $f(x) = x^2$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ โดยการเขียนกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
X^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

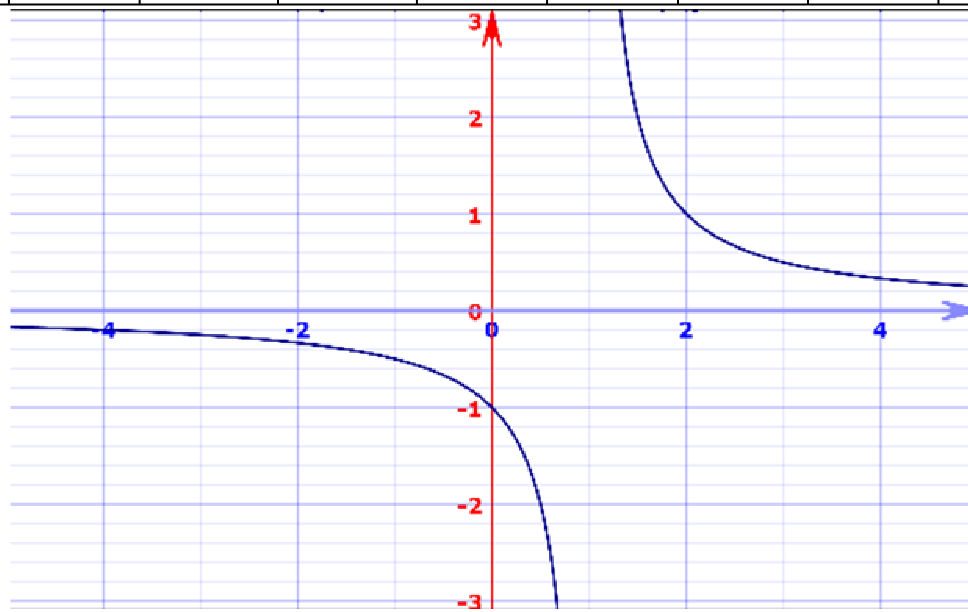


จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 4 $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

โดยการเขียนกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{(x-1)}$	-0.17	-0.2	-0.25	-0.33	-0.5	-1	-	1	0.5	0.33	0.25

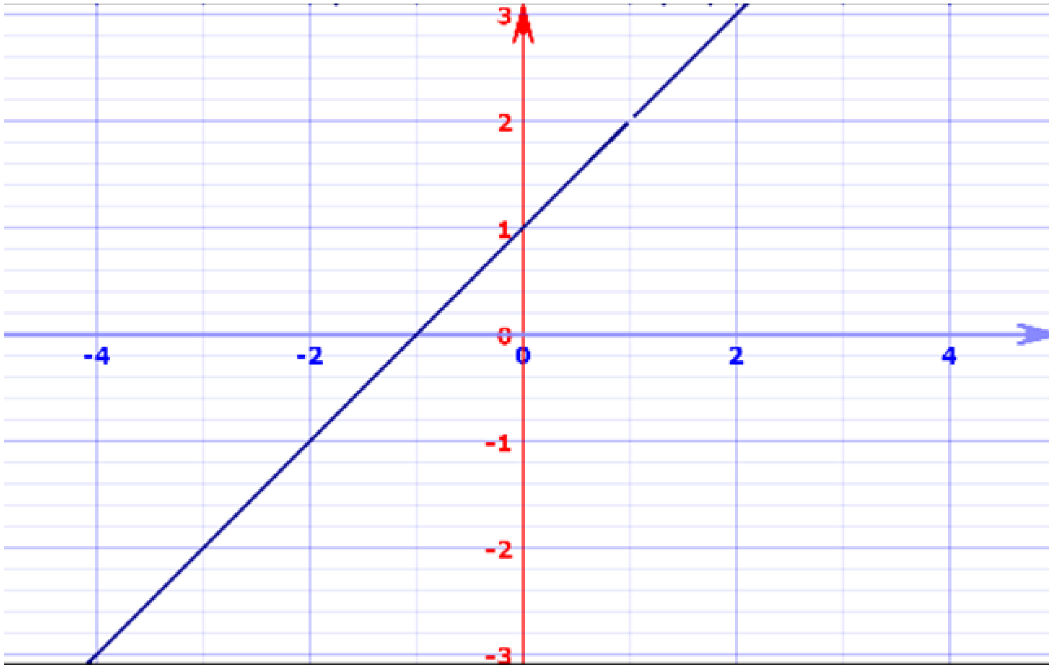


จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ เกิดความไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x = 1 เพราะเมื่อ *x* เท่ากับ 1 ฟังก์ชันจะหาค่าไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ *x=1*

ตัวอย่างที่ 5 $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

โดยการเขียนกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{(x^2-1)}{(x-1)}$	-4	-3	-2	-1	0	1	-	3	4	5	6



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$ เกิดความไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x = 1 เพราะเมื่อ *x* เท่ากับ 1

ฟังก์ชันจะหาค่าไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ *x=1*

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x - 5; x \neq 1 \\ 2; x = 1 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ x=1 หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

$$1.\ f(1) = 2 = \ 2$$

$$2.\ \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 3(1) - 5 = -2$$

$$3.\ f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$$

ดังนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x=1

ตัวอย่างที่ 7 ฟังก์ชัน $f(x)\begin{cases} 2x+1; x>5 \\ 9; x=5 \\ x+3; x<5 \end{cases}$

มีความต่อเนื่องที่ *x=5* หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(5)=9$

2. $\lim\limits_{x\to 5^-} f(5)=5+3=8$ และ

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(5)=2(5)+1=11$

3. คำตอบของ $f(5)\neq \lim\limits_{x\to 5^-} f(5)\neq \lim\limits_{x\to 5^+} f(5)$

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ *x=5*

ตัวอย่างที่ 8 ฟังก์ชัน $f(x)\begin{cases} x^2+4; x<2 \\ 5; x=2 \\ x^3; x>2 \end{cases}$

มีความต่อเนื่องที่ *x=2* หรือไม่

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(2)=5$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(2)=(2)^3=8$ และ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(2)=(2)^2+4=8$
3. คำตอบของ $f(52)\neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(2)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(2)$

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ *x=2*

ตัวอย่างที่ 9 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ มีความต่อเนื่องที่ x=1

พิจารณาตามนิยาม

1. $f(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 4$

2. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x^2 - \lim_{x \to 1} 3x + \lim_{x \to 1} 5$

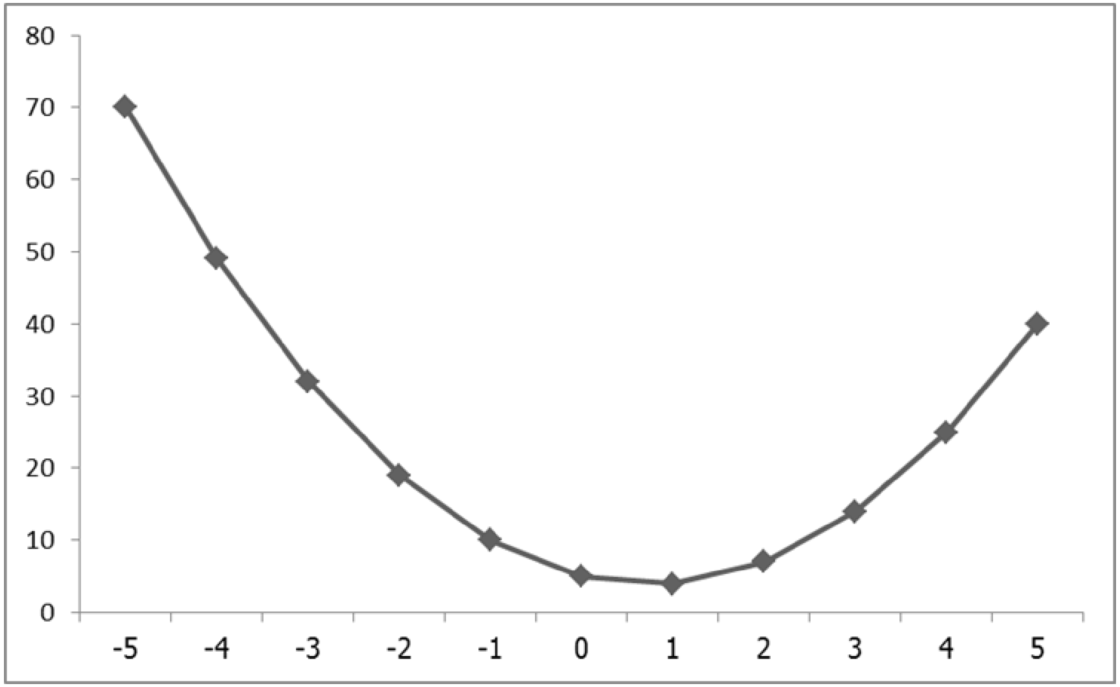
$= 2(1)^2 - 3(1) + 5 = 4$

3. $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$

ดังนั้น ฟังก์ชันจึงมีความต่อเนื่องที่ x=1

พิจารณาจากกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2x^2-3x+5$	70	49	32	19	10	5	4	7	14	25	40



จากกราฟแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ x=1

ตัวอย่างที่ 10 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$ มีความต่อเนื่องที่ x=-2 หรือไม่

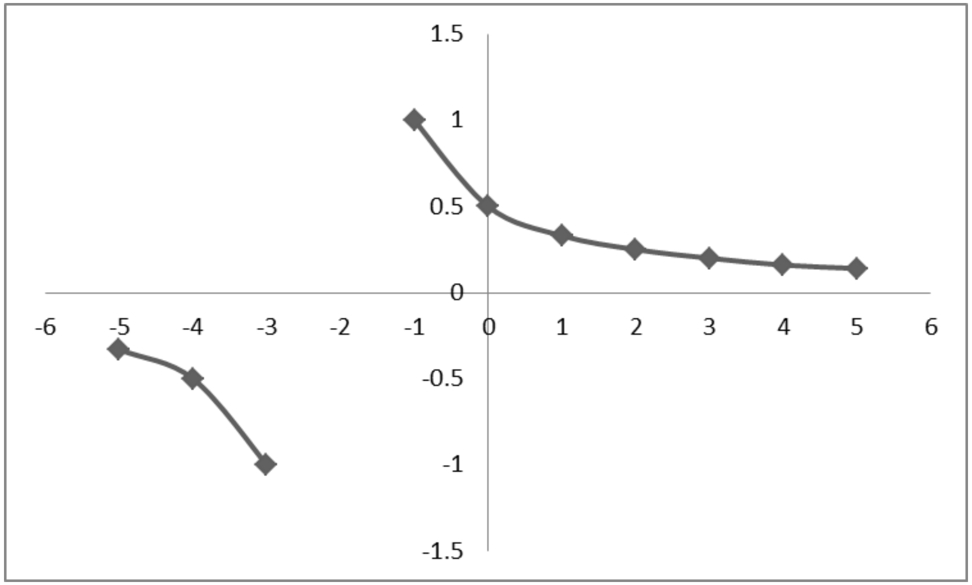
พิจารณาตามนิยาม

$1.\ f(-2) = \frac{1}{(-2)+2} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$ ไม่ต่อเนื่อง เมื่อ x=-2

พิจารณาจากกราฟ

f(x)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \frac{1}{(x+2)}$	-0.33	-0.5	-1	-	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.16	0.14



จากกราฟแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องเมื่อ x=-2