



NPRU

Nakhon Pathom

Rajabhat University

อินทิกรัลของฟังก์ชัน

Integral of Function

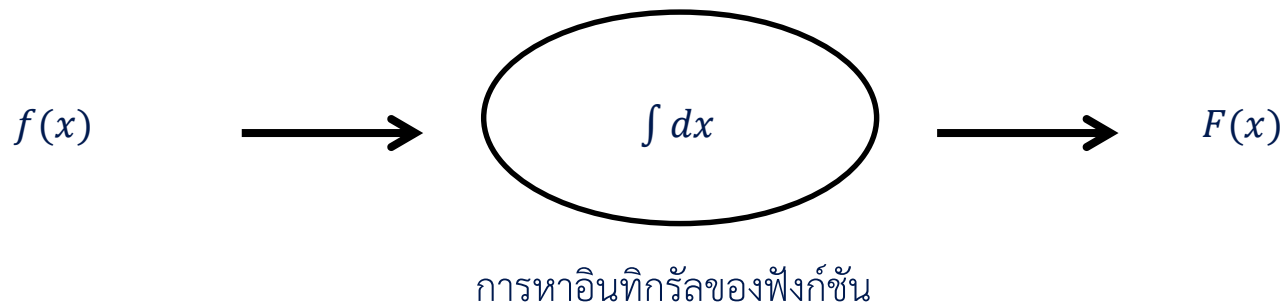
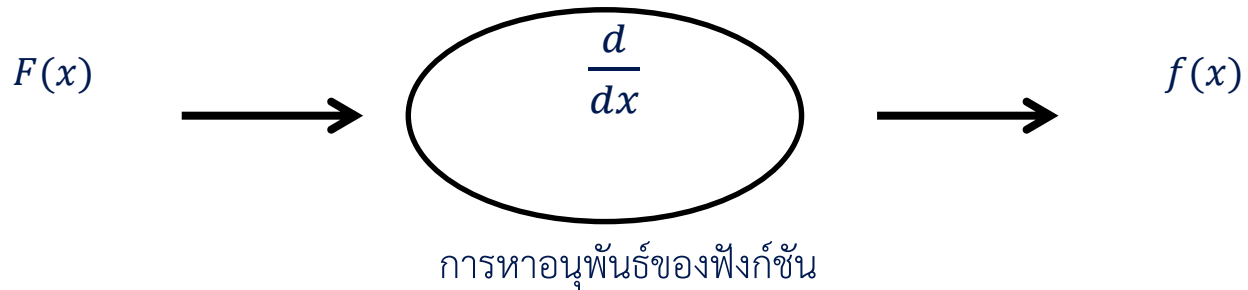
สาขาอุตสาหกรรมศิลป์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



อินทิกรัล (Integral) คือ ผลลัพธ์ของการคำนวณแบบอินทิเกรต (Integration) คือการคำนวณฟังก์ชันโดยทั่วไป เช่นการคำนวณหาพื้นที่ใต้กราฟ หรือหาแรงกระทำต่อวัตถุ

อินทิกรัลสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ

1. อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)
2. อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integrals)





ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆค่า x ของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้ว
จะได้ค่าของ $f(x)$ คือ $F(x) + c$ เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ ซึ่ง
เรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite integrals) ของ $f(x)$ เทียบ
กับ x

สัญลักษณ์ \int เรียกว่า เครื่องหมายอินทิกรัล (Integral symbol)

สัญลักษณ์ dx เป็นตัวบ่งชี้ว่าให้ อินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x



1. $\int 1dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} c ; (n \neq -1)$

3. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$; ให้ a เป็นค่าคงตัวใดๆ

4. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$



$$6. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$7. \int e^x dx = e^x + c$$

$$8. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$9. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$10. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$11. \int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int (2x^3 - \cos x + 7)dx$

ใช้สูตร $\int 1dx = x + c$

$$\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + c ; (n \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int (2x^3 - \cos x + 7)dx = 2 \int x^3 dx - \int \cos x dx + 7 \int dx$$

$$= 2 \left(\frac{x^4}{4} + c_1 \right) - (\sin x + c_2) + 7(x + c_3)$$



$$\begin{aligned}\int (2x^3 - \cos x + 7) dx &= \frac{1}{2}x^4 + 2c_1 - \sin x - c_2 + 7x + 7c_3 \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \sin x + 7x + (2c_1 - c_2 + 7c_3)\end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกสามารถนำค่าคงที่ตัวที่เกิดจากการอินทิเกรตมารวมกันเป็นค่าคงที่ตัว C ตัว

เดียวได้จะได้คำตอบเป็น $= \frac{1}{2}x^4 - \sin x + 7x + c$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int (e^x + 4^x) dx$

ใช้สูตร $\int e^x dx = e^x + c$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int (e^x + 4^x) dx = \int e^x dx + \int 4^x dx$$

$$= e^x + c_1 + \frac{4^x}{\ln 4} + c_2$$

$$= e^x + \frac{4^x}{\ln 4} + (c_1 + c_2)$$

$$= e^x + \frac{4^x}{\ln 4} + c$$



ในกรณีที่ไม่สามารถอินทิเกรตตามสูตรได้จะนิยมใช้วิธีการแทนค่า
(Method of U-Substitution) โดยใช้หลักการดังนี้

1. $f(g(x))$ สำหรับการแทนค่า

$$u = g(x), du = g'(x)dx$$

2. หาค่าอินทิกรัลในเทอมของ u

3. แทนค่า u ด้วย $g(x)$ จะได้คำตอบอยู่ในเทอมของ x



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า $\int (x + 4)^5 dx$

อินทิเกรตโดยการแทนค่า u โดยที่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$

$$\text{กำหนดให้ } u = x + 4, \quad du = \frac{d}{dx}(x + 4)dx$$

$$= 1dx$$

$$\text{และ } dx = du$$

$$\text{แทนค่าจะได้ } \int (x + 4)^5 dx = \int u^5 du$$

$$= \frac{u^{5+1}}{5+1} + c$$

$$= \frac{u^6}{6} + c$$



แทนค่า u กลับในสมการจะได้

$$\int (x + 4)^5 dx = \frac{(x+4)^6}{6} + c$$

ดังนั้นค่าของ $\int (x + 4)^5 dx = \frac{(x+4)^6}{6} + c$



ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า $\int \frac{x^2}{(x^3-1)^5} dx$

อินทิเกรตโดยการแทนค่า u โดยที่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$

$$\begin{aligned} \text{กำหนดให้ } u = x^3 - 1, \quad du &= \frac{d}{dx}(x^3 - 1)dx \\ &= 3x^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{และ } dx = \frac{du}{3x^2}$$



$$\begin{aligned}\text{แทนค่าจะได้ } \int \frac{x^2}{(x^3-1)^5} dx &= \int \frac{x^2}{(u)^5} \times \frac{du}{3x^2} \\ &= \int \frac{1}{u^5} \times \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-5} du \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{u^{-4}}{-4} + c \\ &= -\frac{1}{12u^4} + c\end{aligned}$$



แทนค่า u กลับในสมการจะได้

$$\int \frac{x^2}{(x^3 - 1)^5} dx = -\frac{1}{12(x^3 - 1)^4} + c$$

ดังนั้นค่าของ $\int \frac{x^2}{(x^3 - 1)^5} dx = -\frac{1}{12(x^3 - 1)^4} + c$



- ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เรียกผลลัพธ์ของการอินทิเกรตนี้ว่า อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral) จะแสดงโดย $\int_a^b f(x)dx$ อินทิกรัลจำกัดเขตบางครั้งเรียกว่า รีมันน์อินทิกรัล (Riemann Integral) และผลรวมที่ได้จะเรียกว่า ผลรวมรีมันน์ (Riemann Sum)



ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\int_1^3 x^2 dx$

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2 dx &= \left. \frac{x^{2+1}}{3} \right|_1^3 \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 \\ &= \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} \\ &= \frac{27 - 1}{3} = \frac{26}{3}\end{aligned}$$

คำตอบของ $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$



ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 (1-x)^3 dx$

อินทิเกรตโดยการแทนค่า u โดยที่ $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$

กำหนดให้ $u = 1 - x$, ดังนั้น ถ้า $x = -1$ แล้ว $u = 1 - (-1) = 2$ และ

ถ้า $x = 1$ แล้ว $u = 1 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} du &= \frac{d}{dx}(1-x)dx \\ &= -dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่าจะได้ } \int_{-1}^1 (1-x)^3 dx &= -\int_2^0 u^3 du \\ &= -\frac{u^{3+1}}{4} \Big|_2^0 \\ &= -\frac{u^4}{4} \Big|_2^0 \end{aligned}$$



NPRU

Nakhon Pathom
Rajabhat University

$$\int_{-1}^1 (1-x)^3 dx = -\frac{(2)^4}{4} + \frac{(0)^4}{4}$$
$$= 4$$

คำตอบของ $\int_{-1}^1 (1-x)^3 dx = 4$



NPRU
Nakhon Pathom
Rajabhat University

การอินทิเกรตที่ละส่วน (Integration by Parts)

ถ้า $u(x)$ และ $V(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้โดยกฎของการหาอนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชันจะได้

$$\int u dv = uv - \int v du$$



ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int x \sin x \, dx$

จากสูตร $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

กำหนดให้ $u = x \quad du = dx$

$dv = \sin x \, dx \quad v = -\cos x$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= (x)(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c\end{aligned}$$

คำตอบของ $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$



ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\int x\sqrt{x+1}dx$

จากสูตร $\int u dv = uv - \int v du$

กำหนดให้ $u = x$ $du = dx$

$$dv = \sqrt{x+1}dx \quad v = \int \sqrt{x+1}dx$$

$$v = \int (x+1)^{1/2} dx$$

$$v = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$



แทนค่า ในสูตร จะได้

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}dx &= x\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right) - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx \\ &= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{3/2} dx \\ &= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right] \\ &= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right) (x+1)^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C\end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\int x^2 \sin x dx$

จากสูตร

$$\int u dv = uv - \int v du$$

กำหนดให้ $u = x^2$ $du = 2x dx$

$$\begin{aligned} dv = \sin x dx \quad v &= \int \sin x dx \\ &= -\cos x \end{aligned}$$



แทนค่าลงในสูตรจะได้

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx \\ &= \\ -x^2 \cos x - [-2x \sin x + \int (-2x \sin x) dx] \\ &= -x^2 \cos x - [(-2x \sin x) - 2x \cos x] \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2x \cos x + C\end{aligned}$$