



Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Electrical Engineering

Faculty of Science and Technology

Electrical Engineering

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ระบบพิกัดฉาก
2. การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด
3. การหาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุด
4. ความเอียงและความชันของเส้นตรง
5. สมการเส้นตรง
6. เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก
7. มุมระหว่างเส้นตรง
8. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง
9. ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน
10. การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม
11. ภาคตัดกรวย

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

เรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry) เป็นการศึกษาพื้นฐานคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับระนาบของเส้น จุดที่อยู่บนระนาบ การหาระยะทางและหาจุดแบ่งระหว่างจุดสองจุด เส้นตรง การหาความชัน ความเอียงของเส้นตรง สมการเส้นตรง เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก มุมระหว่างเส้นตรง ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน การประยุกต์ใช้กับการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และสุดท้ายภาคตัดกรวย ซึ่งเป็นพื้นฐานที่ต้องใช้ในการศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์

1.1 ระบบแกนพิกัดฉาก

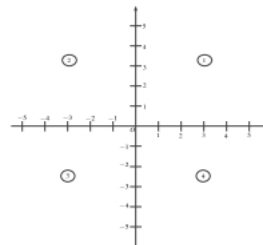
ในระบบแกนพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) ประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้น ลากตั้งฉากกัน เส้นตรง 2 เส้น เรียกว่า แกนโคออร์ดิเนต (coordinate axis) กำหนดให้เส้นตรงในแนวตั้ง (vertical) เป็นแกน y (axis- y) เส้นตรงในแนวนอน (horizontal) เป็นแกน x (axis- x) ดังภาพที่ 1.1 เส้นตรงทั้ง 2 เส้นตัดกันที่จุดกำเนิด (origin point) ให้เป็นจุด O

จุดบนแกน x กำหนดให้ ทางด้านขวาของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงบวก

ทางด้านซ้ายของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงลบ

จุดบนแกน y กำหนดให้ ทางด้านบนของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงบวก

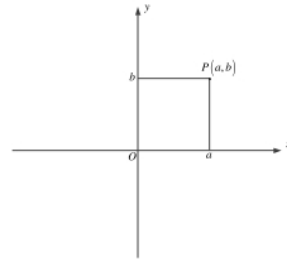
ทางด้านล่างของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงลบ



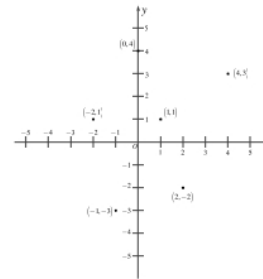
ภาพที่ 1.1 ระบบแกนพิกัดฉาก

สามารถแบ่งพิกัดฉากหรือระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) เป็น 4 จตุภาค (quadrant) เรียงลำดับตามหมายเลขตามภาพที่ 1.1 ได้แก่ จตุภาคที่ 1 จตุภาคที่ 2 จตุภาคที่ 3 และจตุภาคที่ 4

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.2 จุดบนระบบพิกัดฉาก



ภาพที่ 1.3 จุดใด ๆ บนระบบพิกัดฉาก

ให้จุด P เป็นจุดบนระบบพิกัดฉากที่กำหนดด้วยคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) เมื่อลากเส้นผ่านจุด P ตามแนวตั้งทำให้เกิดจุดตัดในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ a และลากเส้นผ่านจุด P ตามแนวนอนทำให้เกิดจุดตัดในแนวแกน y มีค่าเท่ากับ b ดังแสดงในภาพที่ 1.2 จุด $P(a, b)$ นอกจากนี้ยังสามารถแสดงพิกัดของจุดใด ๆ บนระบบพิกัดฉากได้ดังภาพที่ 1.3 อาทิเช่น จุด $(2, -2)$ เป็นจุดที่อยู่ในจุดภาคที่ 4 เนื่องจากค่าในแนวแกน x เป็นค่าบวก และค่าในแนวแกน y เป็นค่าลบ เป็นต้น

1.2 การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ระยะทางตามแนวแกน x คือการหาขนาดในแนวแกน x ว่ามีความยาวเท่าไร โดย ถ้ากำหนดให้จุด x_1 และ x_2 เป็นจุดบนแกน x แล้วสามารถหาระยะทางจาก $AB = x_2 - x_1$ เมื่อ $x_2 > x_1$ ดังภาพที่ 1.4 ระยะทางตามแนวแกน y คือการหาขนาดในแนวแกน y ว่ามีความยาวเท่าไร โดยกำหนดให้จุด y_1 และ y_2 เป็นจุดบนแกน y แล้วสามารถหาระยะทางจาก $CD = y_2 - y_1$ เมื่อ $y_2 > y_1$ ดังภาพที่ 1.5

กำหนดให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ ในระนาบ ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองจุดนี้ สามารถหาได้ดังนี้ จากภาพที่ 1.6 ระยะ $PR = x_2 - x_1$ เป็นระยะทางตามแกน x และระยะ $RQ = y_2 - y_1$ เป็นระยะตามแกน y จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR จะได้ว่า

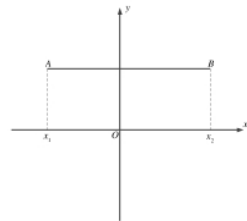
$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2$$

$$(PQ)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

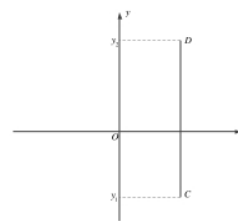
จะได้ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดตามสมการที่ (1.1)

$$d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.1)$$

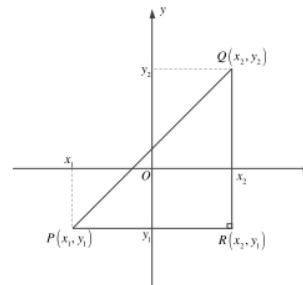
Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.4 ระยะทางตามแนวแกนนอน



ภาพที่ 1.5 ระยะทางตามแนวแกนตั้ง



ภาพที่ 1.6 ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดบนพิกัดฉาก

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $A(0,4)$ และ $B(2,-2)$
2. $C(-1,-3)$ และ $D(4,3)$

วิธีทำ

1. ระยะทางระหว่างจุด $A(0,4)$ และ $B(2,-2)$ คือ

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 - (-2))^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{4 + 16}$$

$$|AB| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{หน่วย}$$

2. ระยะทางระหว่างจุด $C(-1,-3)$ และ $D(4,3)$ คือ

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

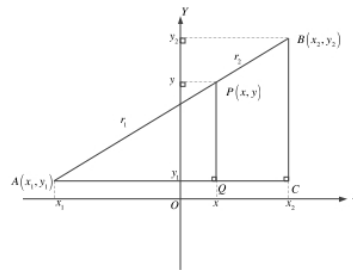


$$\begin{aligned}d &= |CD| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\|CD| &= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (3 - (-3))^2} \\|CD| &= \sqrt{(4 + 1)^2 + (3 + 3)^2} = \sqrt{25 + 36} \\|CD| &= \sqrt{61} \quad \text{หน่วย}\end{aligned}$$

หมายเหตุ ขนาดของระยะทางระหว่างจุด 2 จุดมีค่าเป็นบวกเสมอ อาจจะต้องใส่เครื่องหมายลบ
ละไว้ในฐานที่เข้าใจ $d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1.3 การหาจุดแบ่งระหว่างจุดสองจุด

กำหนดให้ จุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ บนระนาบ xy ให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งระยะทางระหว่างจุด A และจุด B ออกเป็นสัดส่วน $AP : PB = r_1 : r_2$



ภาพที่ 1.7 หาจุดแบ่งระหว่างจุด 2 จุดบนพิกัดฉาก

จากภาพที่ 1.7 พบว่าสามเหลี่ยม APQ และ ABC เป็นสามเหลี่ยมคล้ายทำให้คุณสมบัติต่อไปนี้
เป็นจริง $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$ จากคุณสมบัติข้างต้นจะได้ว่า ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งซึ่งแบ่งส่วนของ
เส้นตรงที่เชื่อมต่อยะหว่างจุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ ออกเป็นสัดส่วน $AP : PB = r_1 : r_2$ สามารถ
หาจุด $P(x, y)$ ได้ดังนี้

$$\text{จุด } x = \frac{r_2 x_1 + r_1 x_2}{r_1 + r_2} \quad \text{จุด } y = \frac{r_2 y_1 + r_1 y_2}{r_1 + r_2} \quad (1.2)$$

ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อยะหว่างจุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$
สามารถหาจุด $P(x, y)$ ได้ดังนี้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

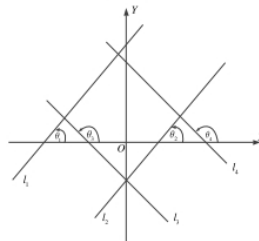


$$y = \frac{(-r_1)y_2 + r_2y_1}{-r_1 + r_2} = \frac{(-2)(-3) + (1)(5)}{-2 + 1} = \frac{6 + 5}{-1} = -11$$

เช่นเดียวกัน จุด $P(x, y) = P(5, -11)$

1.4 ความเอียงและความชันของเส้นตรง

ความเอียงของเส้นตรง คือขนาดของมุมที่วัดจากแนวแกน x ไปยังเส้นตรงในทิศทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งมุม θ ที่เกิดขึ้นสัมพันธ์กับความชันของเส้นตรงโดย ความชันของเส้นตรง คือค่า $\tan(\theta)$ ภาพที่ 1.8 เส้นตรงทั้งหมด 4 เส้น ประกอบด้วย l_1, l_2, l_3 และ l_4 มีความเอียงเท่ากับ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ และ θ_4 ตามลำดับ ความชันของเส้นตรงทั้ง 4 หาได้จาก $\tan(\theta)$ อาทิเช่น ความชันของเส้นตรง l_1 $m_1 = \tan(\theta_1)$ และความชันของเส้นตรง l_2 $m_2 = \tan(\theta_2)$ เป็นต้น



ภาพที่ 1.8 ความเอียงและความชันของเส้นตรง

1.4.1 ความชันของเส้นตรงเมื่อทราบจุด 2 จุดบนเส้นตรง

จากภาพที่ 1.9 เส้นตรง l มีความเอียง θ คือมุมระหว่างเส้นตรงกับแกน x จุด $Q(x_1, y_1)$ และจุด $P(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดที่อยู่บนเส้นตรง l จากจุด Q ลากเส้นตามแนวขนานกับแกน x และจากจุด P ลากเส้นตามแนวขนานกับแกน y ทำให้เกิดจุดตัดระหว่างจุด Q และจุด P ขึ้นที่จุด S กลายเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก สามารถใช้คุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากหาความชันของเส้นตรง l โดยหาระยะ $QS = x_2 - x_1$ และระยะ $SP = y_2 - y_1$ ดังนั้นจะได้

$$\text{ความชันของเส้นตรง } l \quad m = \tan \theta = \frac{SP}{QS} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{เมื่อ } x_2 - x_1 \neq 0$$

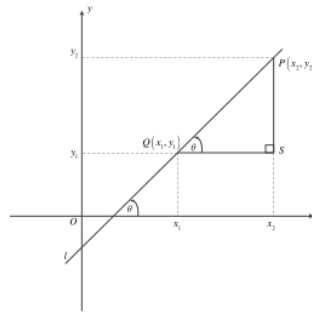
1.4.2 คุณสมบัติความเอียงและความชันของเส้นตรง

กำหนดให้ θ เป็นความเอียงของเส้นตรง และ m เป็นความชันของเส้นตรง สรุปคุณสมบัติความเอียงและความชันของเส้นตรงได้ดังนี้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



1. เส้นตรงที่ขนานกับแกน x มีความเอียงเท่ากับ 0 องศา และมีความชันเท่ากับ 0 เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x มีความเอียงเท่ากับ 90 องศา และมีความชันเท่ากับ ∞ ไม่มีความชัน หรือหาไม่ได้
2. ความเอียงของเส้นตรงมีค่าอยู่ในช่วงมุม $0 \leq \theta \leq 180$ องศา เท่านั้น
3. เมื่อความเอียงมีค่าอยู่ระหว่าง $0 < \theta < 90$ องศา ดังนั้นความชันมีค่าเป็นบวกเสมอ $m > 0$
4. เมื่อความเอียงมีค่าอยู่ระหว่าง $90 < \theta < 180$ องศา ดังนั้นความชันมีค่าเป็นลบเสมอ $m < 0$



ภาพที่ 1.9 หาความชันของเส้นตรงเมื่อทราบจุด 2 จุด บนเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาความชัน m ของเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1. เส้นตรงมีความเอียง θ เท่ากับ 135 องศา
2. เส้นตรงผ่านจุด $(2, -1)$ และ $(5, 2)$

วิธีทำ

1. เส้นตรงมีความเอียง θ เท่ากับ 135 องศา

ความชันของเส้นตรง คือ $m = \tan(\theta)$

$$m = \tan(135^\circ) = \tan(180^\circ - 135^\circ)$$

$$m = -\tan(45^\circ) = -1$$

$$m = -1$$

2. เส้นตรงผ่านจุด $(2, -1)$ และ $(5, 2)$

ให้จุด $(2, -1)$ เป็นจุด (x_1, y_1) และ $(5, 2)$ เป็นจุด (x_2, y_2)

$$\text{ความชันของเส้นตรง คือ } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - (-1)}{5 - 2} = \frac{3}{3}$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาความเอียง θ ของเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1. เส้นตรงมีความชัน $-\sqrt{3}$
2. เส้นตรงผ่านจุด $(1, 4\sqrt{3})$ และ $(2, 5\sqrt{3})$

วิธีทำ

1. เส้นตรงมีความชัน $-\sqrt{3}$ จาก $m = \tan(\theta)$ ดังนั้น

$$-\sqrt{3} = \tan(\theta)$$

$$-\sqrt{3} = -\tan(60^\circ)$$

$$-\sqrt{3} = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \tan(120^\circ)$$

เพราะฉะนั้น ความเอียง $\theta = 120$ องศา

2. เส้นตรงผ่านจุด $(1, 4\sqrt{3})$ และ $(2, 5\sqrt{3})$

ให้จุด $(1, 4\sqrt{3})$ เป็นจุด (x_1, y_1) และ $(2, 5\sqrt{3})$ เป็นจุด (x_2, y_2)

ความชันของเส้นตรง คือ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2 - 1} = \frac{1\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

ความเอียงของเส้นตรง คือ $m = \tan(\theta)$ ดังนั้น

$$\sqrt{3} = \tan(\theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

เพราะฉะนั้น ความเอียง $\theta = 60$ องศา

1.5 สมการเส้นตรง

สมการเส้นตรงเป็นพื้นฐานของเรขาคณิต หรือเป็นพื้นฐานของแคลคูลัสเพราะวิธีการอธิบายปรากฏการณ์ในรูปแบบของกราฟความสัมพันธ์ ของตัวแปรในด้านวิศวกรรมศาสตร์ก็ตามที่ ต้องอาศัยระนาบ พิกัดจุด และเส้นตรง ในที่นี้จะแสดงวิธีหาสมการเส้นตรงในระนาบ xy หรือระบบพิกัดฉาก มีวิธีการหาสมการเส้นตรงตามเงื่อนไขต่าง ๆ ดังนี้

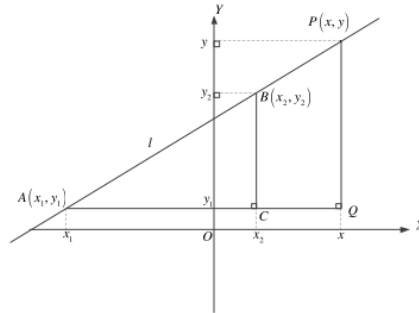
1.5.1 เมื่อกำหนดจุด 2 จุดที่อยู่บนเส้นตรง

ดังภาพที่ 1.10 กำหนดให้จุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ ทั้ง 2 จุดอยู่บนเส้นตรง l ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรง l เช่นกัน ภาพที่ 1.10 ประกอบด้วยสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม APQ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\text{สัดส่วนของ } \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC} \text{ จะได้ว่า } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ จัดรูปใหม่จะได้สมการที่ (1.5)}$$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) \quad (1.5)$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.10 สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดจุด 2 จุด

1.5.2 เมื่อกำหนดความชันและจุด 1 จุดที่อยู่บนเส้นตรง

เมื่อกำหนดความชันของเส้นตรง และจุดที่อยู่บนเส้นตรงมาให้ สามารถหาแสดงวิธีหาสมการเส้นตรงได้จากสมการที่ (1.5) ดังนี้

$$\text{จาก } y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) \text{ แทนค่าความชัน } m = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \text{ จะได้}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (1.6)$$

ดังนั้นเมื่อกำหนดความชัน m และจุด 1 จุด (x_1, y_1) ใด ๆ สามารถหาสมการเส้นตรงโดยแทนในสมการที่ (1.6)

1.5.3 เมื่อกำหนดความชันและส่วนตัดแกน Y หรือ X

ดังภาพที่ 1.11 ในกรณีที่กำหนดความชัน m และส่วนตัดแกน Y ให้จุดตัดแกน Y เป็น $(0, b)$ ซึ่งสามารถแทนจุด (x_1, y_1) เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรงได้ ดังนั้นสามารถหาสมการเส้นตรงได้จากสมการที่ (1.6) แทนจุด (x_1, y_1) ใด ๆ ด้วยจุดตัดแกน Y เป็น $(0, b)$ จะได้

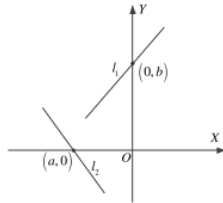
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b \quad (1.7)$$

ดังภาพที่ 1.11 ในกรณีที่กำหนดความชัน m และส่วนตัดแกน X ให้จุดตัดแกน X เป็น $(a, 0)$ ซึ่งสามารถแทนเป็นจุด (x_1, y_1) ใด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรงได้ ดังนั้นสามารถหาสมการเส้นตรงได้จากสมการที่ (1.6) แทนจุด (x_1, y_1) ใด ๆ ด้วยจุดตัดแกน X เป็น $(a, 0)$ จะได้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.11 เส้นตรงเมื่อกำหนดความชันและจุดตัดแกน

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = m(x - a)$$

$$y = mx + c \quad (1.8)$$

เมื่อ c คือผลการคูณกันของ m และ a

1.5.4 เมื่อกำหนดส่วนตัดแกน X และแกน Y

กำหนดให้เส้นตรง l มีส่วนตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ และส่วนตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ ดังแสดงในภาพที่ 1.12 สามารถหาสมการเส้นตรงได้จากสมการที่ (1.5) แทนจุด (x_1, y_1) ด้วยจุด $(a, 0)$ และแทนจุด (x_2, y_2) ด้วยจุด $(0, b)$ จะได้

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

$$y - 0 = \left(\frac{b - 0}{0 - a} \right) (x - a)$$

$$y = \left(\frac{b}{-a} \right) (x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a} (x - a)$$

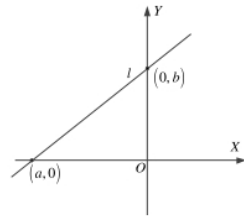
$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

หารด้วย ab ทั้งสมการ จะได้

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1.9)$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.12 เส้นตรงเมื่อกำหนดจุดตัดแกน X และ Y

สมการเส้นตรงทั้ง 4 รูปแบบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax + By + C = 0 \quad (1.10)$$

A , B และ C คือค่าคงที่ ถ้า $A = 0$ แล้ว $B \neq 0$ และถ้า $B = 0$ แล้ว $A \neq 0$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $(a, 0)$ มีสมการ ดังนี้

$$x = a \quad (1.11)$$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด $(0, b)$ มีสมการ ดังนี้

$$y = b \quad (1.12)$$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -7)$ และ $(-2, 5)$

วิธีทำ

$$\text{กำหนดให้ } (x_1, y_1) = (3, -7)$$

$$(x_2, y_2) = (-2, 5)$$

$$\text{จาก } y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

แทนค่าจุด $(3, -7)$ และจุด $(-2, 5)$ จะได้

$$y - (-7) = \left(\frac{5 - (-7)}{(-2) - 3} \right) (x - 3)$$

$$y + 7 = \left(\frac{5 + 7}{-5} \right) (x - 3)$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$y + 7 = -\frac{12}{5}(x - 3)$$

$$5y + 35 = -12x + 36$$

$$12x + 5y - 1 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -7)$ และมีความชันเท่ากับ -1

วิธีทำ

ให้ $(x_1, y_1) = (3, -7)$ และมีความชัน $m = -1$ สามารถหาสมการเส้นตรง ดังนี้

$$\text{จาก } y - y_1 = m(x - x_1)$$

แทนค่า $(x_1, y_1) = (3, -7)$ และมีความชัน $m = -1$ จะได้

$$y - (-7) = (-1)(x - 3)$$

$$y + 7 = -x + 3$$

$$x + y + 4 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 3 และมีความชันเท่ากับ -3

วิธีทำ

ให้ส่วนตัดแกน Y เป็น $(0, b)$ เท่ากับจุด $(0, 3)$ เป็นจุด (x_1, y_1) ใด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรง มีความชันเท่ากับ -3 ดังนั้น

$$\text{จาก } y - y_1 = m(x - x_1) \text{ แทนค่า จะได้}$$

$$y - 3 = -3(x - 0)$$

$$y - 3 = -3x$$

$$3x + y - 3 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน X เท่ากับ 3 และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ -4

วิธีทำ

ให้ ส่วนตัดแกน X เท่ากับ 3 เป็นจุด $(x_1, y_1) = (3, 0)$ หรือ $a = 3$

ส่วนตัดแกน Y เท่ากับ -4 เป็นจุด $(x_2, y_2) = (0, -4)$ หรือ $b = -4$

สามารถหาสมการเส้นตรงได้จากสมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ แทนค่า จะได้



Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$$

$$\frac{4x - 3y}{12} = 1$$

$$4x - 3y = 12$$

$$4x - 3y - 12 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาความชันและส่วนตัดแกน Y ของสมการเส้นตรงต่อไปนี้

1. $2x - 6y - 8 = 0$

2. $10x - 5y + 12 = 0$

วิธีทำ

1. จากสมการ $2x - 6y - 8 = 0$

$$-6y = -2x + 8$$

$$y = \frac{-2x}{-6} + \frac{8}{-6}$$

$$y = \frac{x}{3} - \frac{4}{3}$$

เปรียบเทียบกับสมการ $y = mx + b$ จะได้

$$\text{ความชันของเส้นตรงคือ } m = \frac{1}{3}$$

$$\text{และส่วนตัดแกน } Y \text{ คือ } b = -\frac{4}{3}$$

2. จากสมการ $10x - 5y + 12 = 0$

$$-5y = -10x - 12$$

$$y = \frac{-10x}{-5} - \frac{12}{-5}$$

$$y = 2x + \frac{12}{5}$$

เปรียบเทียบกับสมการ $y = mx + b$ จะได้

$$\text{ความชันของเส้นตรงคือ } m = 2$$

$$\text{และส่วนตัดแกน } Y \text{ คือ } b = \frac{12}{5}$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ตัวอย่างที่ 1.11 จงหาส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y ของสมการเส้นตรงต่อไปนี้

1. $12x - 4y + 1 = 0$

2. $4x + y - 2 = 0$

วิธีทำ

1. จากสมการ $12x - 4y + 1 = 0$

$$12x - 4y = -1$$

$$-12x + 4y = 1$$

$$\frac{x}{(\cancel{12}^{-1})} + \frac{y}{(\cancel{4}^1)} = 1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ จะได้

ส่วนตัดแกน x คือ $a = -\frac{1}{12}$

ส่วนตัดแกน y คือ $b = \frac{1}{4}$

2. จากสมการ $4x + y - 2 = 0$

$$4x + y = 2$$

$$\frac{4x}{2} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{x}{(\cancel{4}^1)} + \frac{y}{2} = 1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ จะได้

ส่วนตัดแกน x คือ $a = \frac{1}{2}$

ส่วนตัดแกน y คือ $b = 2$

ตัวอย่างที่ 1.12 จงหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2kx - 4y + 1 = 0$ และเส้นตรงนี้มีผลรวมของส่วนตัดแกน x และส่วนตัดแกน y เท่ากับ 6

วิธีทำ

จากสมการ $2kx - 4y + 1 = 0$

$$2kx - 4y = -1$$

$$-2kx + 4y = 1$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$\frac{x}{(-1/2k)} + \frac{y}{1/4} = 1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ จะได้

$$\text{ส่วนตัดแกน } x \text{ คือ } a = \frac{-1}{2k}$$

$$\text{ส่วนตัดแกน } y \text{ คือ } b = \frac{1}{4}$$

โดยมีผลรวมของส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 6 คือ $a+b=6$ จะได้

$$\frac{-1}{2k} + \frac{1}{4} = 6$$

$$\frac{-4+2k}{8k} = 6$$

$$-4 = 48k - 2k$$

$$-4 = 46k$$

$$k = \frac{-2}{23}$$

แทนค่า $k = \frac{-2}{23}$ ลงในสมการ $2kx - 4y + 1 = 0$ จะได้

$$2\left(\frac{-2}{23}\right)x - 4y + 1 = 0$$

$$\frac{-4}{23}x - 4y + 1 = 0$$

$$-4y = \frac{4}{23}x - 1$$

$$y = \frac{4}{(-4)23}x - \frac{1}{(-4)}$$

$$y = \frac{-1}{23}x + \frac{1}{4}$$

เปรียบเทียบกับสมการ $y = mx + b$ จะได้

$$\text{ความชันของเส้นตรงคือ } m = \frac{-1}{23}$$

ตัวอย่างที่ 1.13 จงหาส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,5)$ และ $(-1,-3)$

วิธีทำ

กำหนดให้จุด $(1,5)$ เป็นจุด (x_1, y_1) และจุด $(-1,-3)$ เป็นจุด (x_2, y_2) สามารถหาสมการเส้นตรงได้ดังนี้

$$\text{จาก } y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

แทนค่าจุด $(1,5)$ และจุด $(-1,-3)$ จะได้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$y - 5 = \left(\frac{-3-5}{-1-1} \right) (x-1)$$

$$y - 5 = \left(\frac{-8}{-2} \right) (x-1)$$

$$y - 5 = 4(x-1)$$

$$y - 5 = 4x - 4$$

$$-4x + y - 1 = 0$$

จะได้ $-4x + y = 1$

$$\frac{x}{(-1/4)} + \frac{y}{1} = 1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ จะได้

ส่วนตัดแกน X คือ $a = \frac{-1}{4}$

ส่วนตัดแกน Y คือ $b = 1$

1.6 เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันและตั้งฉากกัน

1.6.1 เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

จากภาพที่ 1.13 กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีความเอียงเป็นมุม θ_1 และมีความชันเท่ากับ m_1 เส้นตรง l_2 มีความเอียงเป็นมุม θ_2 และมีความชันเท่ากับ m_2 ถ้าเส้นตรง l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2 จะได้

$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2)$$

และเช่นเดียวกับ $m_1 = m_2$ (1.13)

ซึ่ง $m = \tan(\theta)$ สรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ก็ต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน

1.6.2 เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน

จากภาพที่ 1.14 กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีความเอียงเป็นมุม θ_1 และมีความชันเท่ากับ m_1 ($m_1 \neq 0$) เส้นตรง l_2 มีความเอียงเป็นมุม θ_2 และมีความชันเท่ากับ m_2 ($m_2 \neq 0$) ถ้าเส้นตรง l_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง l_2 จะได้ว่า

$$\theta_1 = 90^\circ + \theta_2$$

$$\tan(\theta_1) = \tan(90^\circ + \theta_2)$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$\tan(\theta_1) = -\cot(\theta_2)$$

$$\tan(\theta_1) = \frac{-1}{\tan(\theta_2)}$$

$$\tan(\theta_1) \cdot \tan(\theta_2) = -1$$

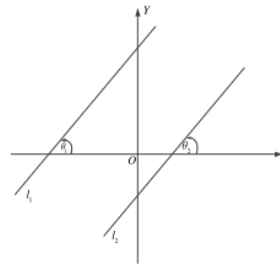
และเช่นเดียวกับ

$$m_1 m_2 = -1$$

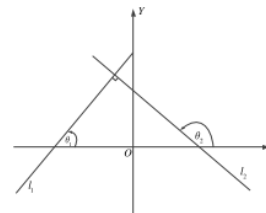
(1.14)

สรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับ -1

$$(m_1 m_2 = -1, m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$$



ภาพที่ 1.13 เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน



ภาพที่ 1.14 เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน

ตัวอย่างที่ 1.14 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -3)$ และขนานกับเส้นตรง $2x + 4y = -3$

วิธีทำ

$$\text{จากสมการเส้นตรง } 2x + 4y = -3$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$4y = -2x - 3$$

$$y = \frac{-2x}{4} - \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{-x}{2} - \frac{3}{4} \text{ เทียบกับ } y = mx + b \text{ จะได้}$$

$$\text{เส้นตรงมีความชัน } m = \frac{-1}{2}$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -3)$ และขนานกับเส้นตรง $2x + 4y = -3$ มีค่าความชันเท่ากันคือ

$$m = \frac{-1}{2} \text{ จะได้}$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

แทนค่า จะได้

$$(y - (-3)) = \frac{-1}{2}(x - 2)$$

$$y + 3 = \frac{-x}{2} + 1$$

$$\frac{x}{2} + y + 2 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงหาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x - 8y = 3$

วิธีทำ

$$\text{จากสมการเส้นตรง } 4x - 8y = 3 \text{ จะได้}$$

$$-8y = -4x + 3$$

$$y = \frac{-4x}{-8} + \frac{3}{-8}$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{8} \text{ เทียบกับ } y = mx + b \text{ จะได้}$$

$$\text{เส้นตรงมีความชัน } m = \frac{1}{2}$$

สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x - 8y = 3$ มีค่าความชันคูณเท่ากัน -1 ดังนั้น

$$\text{จาก } m_1 = \frac{1}{2} \text{ สามารถหา } m_2 \text{ โดย } m_1 m_2 = -1 \text{ จะได้}$$

$$\frac{1}{2} m_2 = -1$$

$$m_2 = -2$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 หรือตัดแกน Y ที่จุด $(0, 2) = (x_1, y_1)$ มีความชันเท่ากับ $m_2 = -2$ หาสมการเส้นตรงได้ดังนี้

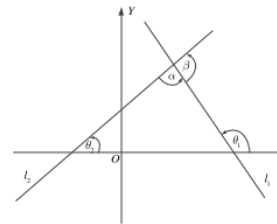
Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$\begin{aligned}\text{จาก } (y-y_1) &= m(x-x_1) \\ (y-2) &= (-2)(x-0) \\ y-2 &= -2x \\ 2x+y-2 &= 0\end{aligned}$$

1.7 มุมระหว่างเส้นตรง

กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีความเอียงเป็นมุม θ_1 และมีความชันเท่ากับ m_1 เส้นตรง l_2 มีความเอียงเป็นมุม θ_2 และมีความชันเท่ากับ m_2 แสดงดังภาพที่ 1.15 ถ้าขนาดของ α คือมุมที่วัดจากเส้นตรง l_2 ไปยัง l_1 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา และขนาดของ β คือมุมที่วัดจากเส้นตรง l_1 ไปยัง l_2 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา แสดงความสัมพันธ์ของมุมต่าง ๆ ดังนี้



ภาพที่ 1.15 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น

$$\theta_1 = \alpha + \theta_2$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{ใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติ } \tan(\theta_1 - \theta_2) \text{ จะได้}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)} \quad \text{จาก } \tan(\theta_1) = m_1 \text{ และ } \tan(\theta_2) = m_2 \text{ จะได้}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right) \quad (1.15)$$

$$\text{และ} \quad \beta = 180^\circ - \alpha \quad (1.16)$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดให้เส้นตรง 2 เส้น $l_1 = 2x - 4y + 6 = 0$ และ $l_2 = 4x - 2y + 4 = 0$ จงหาขนาดมุมที่วัดจากเส้นตรง l_1 ไปยังเส้นตรง l_2

วิธีทำ

$$\text{จาก } l_1 = 2x - 4y + 6 = 0$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \quad \text{เทียบกับสมการ } y = mx + b$$

$$l_1 \text{ มีความชัน } m_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{จาก } l_2 = 4x - 2y + 4 = 0$$

$$y = 2x + 2 \quad \text{เทียบกับสมการ } y = mx + b$$

$$l_2 \text{ มีความชัน } m_2 = 2$$

มุมที่วัดจากเส้นตรง l_1 ไปยังเส้นตรง l_2 คือมุม $\tan(\alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ จะได้

$$\tan(\alpha) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - (2)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)(2)}$$

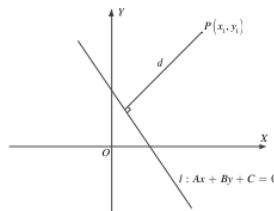
$$\tan(\alpha) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = \frac{-3}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = -36.86^\circ$$

โจทย์ต้องการหามุมจากเส้นตรง l_1 ไปยังเส้นตรง l_2 คือมุม $\beta = 180^\circ - \alpha$ จะได้

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (-36.86^\circ)$$

$$\beta = 216.86^\circ$$



ภาพที่ 1.16 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



1.8 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

จากภาพที่ 1.16 กำหนดให้จุด $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่นอกเส้นตรง $l: Ax + By + C = 0$ ให้ d เป็นระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ และเส้นตรง l ซึ่งสามารถหาระยะทาง d ได้จากสูตร

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.17)$$

ตัวอย่างที่ 1.17 จงหาระยะทางระหว่างจุด $(1, 3)$ กับเส้นตรง $4x - 2y + 3 = 0$

วิธีทำ

กำหนดให้จุด $P(x_1, y_1)$ เท่ากับ $(1, 3)$

สมการเส้นตรง $4x - 2y + 3 = 0$ เทียบกับ $Ax + By + C = 0$ ซึ่ง $A = 4, B = -2$, และ $C = 3$

แทนค่าลงในสมการ $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ จะได้

$$d = \frac{|4(1) + (-2)3 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{|4 - 6 + 3|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ หน่วย}$$

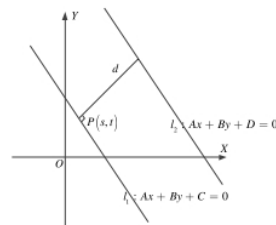
1.9 ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน

จากภาพที่ 1.17 กำหนดให้ เส้นตรง $l_1: Ax + By + C = 0$ และเส้นตรง $l_2: Ax + By + D = 0$ ให้จุด $P(s, t)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l_1 แทนค่าจะได้

$$l_1: Ax + By + C = 0$$

$$As + Bt + C = 0$$

$$As + Bt = -C \quad \text{แทนจุดที่อยู่บนเส้นตรง } l_1$$



ภาพที่ 1.17 ระยะทางระหว่างเส้นขนาน

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ระยะทางระหว่างจุด $P(s,t) = P(x_1, y_1)$ กับเส้นตรง l_2 คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|As + Bt + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{แทนค่า } As + Bt = -C \text{ จะได้}$$

$$d = \frac{|-C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.18)$$

หรือ $d = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.18 รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีจุดยอดที่ $A(-1, -2)$, $B(4, -4)$, $C(3, 2)$ และ $D(-2, 4)$ จงแสดงว่าสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาระยะทางระหว่างด้าน AD และ BC

วิธีทำ

จากสูตร หาคความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ จะได้ว่า

$$\text{หาคความชันของด้าน } AD \text{ จะได้ } m_1 = \frac{4 - (-2)}{-2 - (-1)} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\text{หาคความชันของด้าน } BC \text{ จะได้ } m_2 = \frac{2 - (-4)}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\text{หาคความชันของด้าน } AB \text{ จะได้ } m_3 = \frac{-4 - (-2)}{4 - (-1)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{หาคความชันของด้าน } DC \text{ จะได้ } m_4 = \frac{2 - 4}{3 - (-2)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$\therefore$ จะได้ ด้าน AD ขนานกับด้าน BC และด้าน AB ขนานกับด้าน DC ดังนั้น $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะมีด้านตรงข้ามกันขนานกันเป็นคู่ ๆ

หาระยะทางระหว่างด้าน AD และ BC

สมการเส้นตรงของด้าน AD มีความชัน $m_1 = -6$ ผ่านจุด $(-2, 4)$ มีสมการคือ

$$(y - y_1) = m_1(x - x_1)$$

$$(y - 4) = (-6)(x - (-2))$$

$$(y - 4) = (-6)(x + 2)$$

$$y - 4 = -6x - 12$$

$$6x + y + 8 = 0$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

สมการเส้นตรงของด้าน BC มีความชัน $m_2 = -6$ ผ่านจุด $(3,2)$ มีสมการคือ

$$(y - y_1) = m_2(x - x_1)$$

$$(y - 2) = (-6)(x - 3)$$

$$y - 2 = -6x + 18$$

$$6x + y - 20 = 0$$

จากสมการเส้นตรง $6x + y + 8 = 0$ และ $6x + y + 8 = 0$

เทียบกับ $Ax + By + C = 0$ $Ax + By + D = 0$

จะได้ $A = 6, B = 1, C = 8, D = -20$ ดังนั้นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานนี้คือ

$$d = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 - (-20)|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = \frac{28}{\sqrt{37}} \text{ หน่วย}$$

1.10 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

จากภาพที่ 1.18 สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$ มีระยะห่างระหว่างจุดดังนี้

$$AP = y_1$$

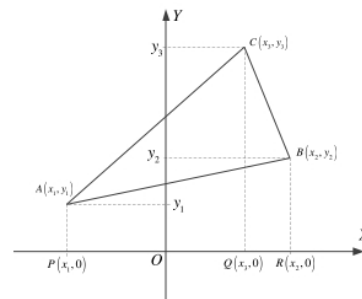
$$CQ = y_3$$

$$BR = y_2$$

$$PQ = x_3 - x_1$$

$$QR = x_2 - x_3$$

$$PR = x_2 - x_1$$



ภาพที่ 1.18 หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



จากภาพที่ 1.18 สามารถแบ่งรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูได้ดังนี้ $APRB$, $APQC$, และ $CQRB$
ใช้สูตรหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูคือ

$$\text{หาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู} = \frac{1}{2} (\text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน}) \times \text{สูง}$$

จะได้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูทั้ง 3 ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู } APRB &= \frac{1}{2}(AP + BR) \times PR \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \times (x_2 - x_1) \\ &= \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู } APQC &= \frac{1}{2}(AP + CQ) \times PQ \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \times (x_3 - x_1) \\ &= \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_1 + x_3 y_3 - x_1 y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู } CQRB &= \frac{1}{2}(CQ + BR) \times QR \\ &= \frac{1}{2}(y_3 + y_2) \times (x_2 - x_3) \\ &= \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_3 + x_2 y_2 - x_3 y_2) \end{aligned}$$

ดังนั้นพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC หาได้จาก

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_1 + x_3 y_3 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_3 + x_2 y_2 - x_3 y_2) - (x_2 y_1 - x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2) \\ &= \frac{1}{2}(x_3 y_1 - \cancel{x_1 y_1} + \cancel{x_3 y_3} - \cancel{x_1 y_3} + x_2 y_3 - \cancel{x_3 y_3} + \cancel{x_2 y_2} - x_3 y_2 - x_2 y_1 + \cancel{x_1 y_1} - \cancel{x_2 y_2} + x_1 y_2) \end{aligned}$$

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3) \quad (1.19)$$

สรุป การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่มีจุดยอด $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$ สามารถคำนวณได้จาก

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ได้ด้วย สมมติให้จุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ดังนี้ มีจุดยอด $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ และ $D(x_4, y_4)$ หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ จะได้

$$\text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม } ABCD = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

ตัวอย่างที่ 1.19 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม KFC ที่มีจุดยอด $K(-2, -4)$, $F(3, -1)$ และ $C(3, 5)$

วิธีทำ

กำหนดให้จุด $K(-2, -4) = (x_1, y_1)$ จุด $F(3, -1) = (x_2, y_2)$ และจุด $C(3, 5) = (x_3, y_3)$

จากสูตร พื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ $= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$

แทนค่าตามสูตร จะได้

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } KFC &= \frac{1}{2} [(-2)(-1) + 3(5) + 3(-4) - 3(-4) - 3(-1) - (-2)5] \\ &= \frac{1}{2} [2 + 15 - 12 + 12 + 3 + 10] \\ &= \frac{30}{2} = 15 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.20 จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $WXYZ$ ที่มีจุดยอดเป็น $W(1, -5)$, $X(6, -3)$, $Y(6, 4)$ และ

$Z(2, 5)$

วิธีทำ

กำหนดให้จุด $W(1, -5) = (x_1, y_1)$, $X(6, -3) = (x_2, y_2)$, $Y(6, 4) = (x_3, y_3)$

และ $Z(2, 5) = (x_4, y_4)$

จากสูตร พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ $= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$

แทนค่าตามสูตร จะได้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

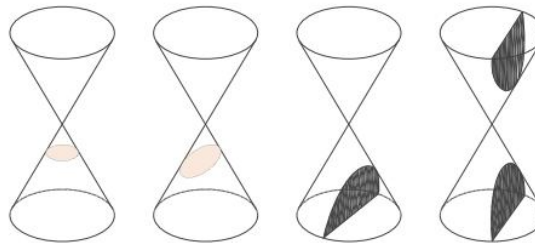


$$\begin{aligned}\text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม } WXYZ &= \frac{1}{2}[1(-3)+6(4)+6(5)+2(-5)-6(-5)-6(-3)-2(4)-1(5)] \\ &= \frac{1}{2}[-3+24+30-10+30+18-8-5] \\ &= \frac{1}{2}[102-26] = \frac{76}{2} = 38 \text{ ตารางหน่วย}\end{aligned}$$

1.11 ภาคตัดกรวย

ภาคตัดกรวย (conic section) เป็นเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบต่าง ๆ ทำให้เกิดเป็นรูปวงกลม, พาราโบลา, วงรี, และไฮเพอร์โบลา ดังแสดงในภาพที่ 1.19 กล่าวคือ

1. วงกลม (circle) เกิดขึ้นจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวย
2. พาราโบลา (parabola) เกิดขึ้นจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวย
3. วงรี (ellipse) เกิดขึ้นจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ตัดกรวยเพียงส่วนเดียวโดยที่ระนาบนั้นไม่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวยและไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย
4. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) เกิดขึ้นจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบที่ขนานกับแกนของกรวยและตัดทั้งสองส่วนของกรวย รูปทั่วไปของสมการภาคตัดกรวยคือ



ภาพที่ 1.19 รูปแสดงภาคตัดกรวยแบบต่าง ๆ

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (1.20)$$

โดยที่

1. ถ้า $|A| = |B|$ และ A, B มีเครื่องหมายเดียวกัน จะได้เป็นสมการวงกลม
2. ถ้า $|A| \neq |B|$ และ A, B มีเครื่องหมายเดียวกัน จะได้เป็นสมการวงรี

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



3. ถ้า $|A| = |B|$ และ A, B มีเครื่องหมายต่างกัน จะได้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา
4. ถ้า A หรือ B ตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์ (ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน) จะได้เป็นสมการพาราโบลา
5. ถ้า $A=B=0$ จะได้เป็นสมการเส้นตรง

1.11.1 สมการวงกลม

วงกลม คือ เซตของจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และเรียกระยะทางระหว่างจุดคงที่กับเซตของจุดเรียกว่ารัศมี ถ้ากำหนดให้จุด $C(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ r และจุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนวงกลม ตามภาพที่ 1.20 จะได้ว่า

$$\text{ระยะทางจาก } CP = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $C(h, k)$ และรัศมี r ในรูปมาตรฐาน

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (1.21)$$

ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางเป็น $C(0,0)$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า $h=0$ และ $k=0$ ในสมการที่ (1.21) จะได้

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ถ้านำสมการที่ (1.21) มากระจาย จะได้

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + h^2 + (-2k)y + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

แทนค่า $(-2h) = A$, $(-2k) = B$ และ $(h^2 + k^2 - r^2) = C$ จะได้ สมการวงกลมในรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (1.22)$$

โดยที่ A, B และ C เป็นค่าคงที่ และจะได้ว่า สมการที่ (1.22) จัดให้อยู่ในรูปของสมการวงกลมแบบมาตรฐานได้เป็น

$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) + C = 0$$

$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$$

$$\left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C)$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}\right)^2$$

เปรียบเทียบกับสมการที่ (1.21)

$$(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \quad (1.23)$$

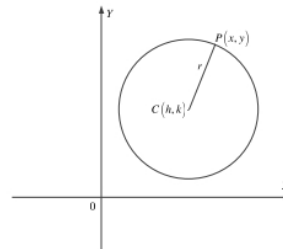
$$\text{และรัศมีเท่ากับ} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \quad (1.24)$$

โดยที่ $A^2 + B^2 - 4C > 0$ วงกลมมีจุดศูนย์กลางตามสมการที่ (1.23) และมีรัศมีตามสมการที่ (1.24)

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C = 0$ มีกราฟเป็นจุด ๆ เดียวคือ $(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

ถ้า $A^2 + B^2 - 4C < 0$ ไม่มีกราฟ เพราะว่า $\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 \geq 0$ และ $\left(y + \frac{B}{2}\right)^2 \geq 0$ ดังนั้นไม่มีจำนวนจริง x

และ y ใด ๆ ที่ทำให้ $\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 < 0$ ได้



ภาพที่ 1.20 รูปวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

ข้อสังเกต ลักษณะของสมการวงกลม

1. มีตัวแปร 2 ตัว (สมมติเป็น x และ y) และกำลังสูงสุดของตัวแปรทั้งสองมีค่าเท่ากับ 2 คือ x^2 และ y^2
2. สัมประสิทธิ์ (ส.ป.ส) ของตัวแปร x^2 และ y^2 มีค่าเท่ากับ 1 ทั้งคู่ และไม่มีพจน์ที่เป็น xy
3. ถ้าไม่มีพจน์ที่มีตัวแปร x และ y จะเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ตัวอย่างที่ 1.21 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, 2)$ และมีรัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

วิธีทำ

จากโจทย์กำหนดให้ $(h, k) = (1, 2)$ และ $r = 4$ แทนค่าลงในสูตร $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 16$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 16 = 0$$

$$\text{สมการวงกลมคือ} \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.22 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(1, 0)$, $(-2, -1)$ และ $(0, 3)$

วิธีทำ

นำจุดทั้ง 3 จุด แทนในสมการวงกลมทั่วไป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

ที่จุด $(1, 0)$ แทนลงในสมการทั่วไป จะได้

$$1^2 + 0^2 + A(1) + B(0) + C = 0$$

$$A + C = -1 \quad \text{.....(1)}$$

ที่จุด $(-2, -1)$ แทนลงในสมการทั่วไป จะได้

$$(-2)^2 + (-1)^2 + A(-2) + B(-1) + C = 0$$

$$4 + 1 - 2A - B + C = 0$$

$$-2A - B + C = -5 \quad \text{.....(2)}$$

ที่จุด $(0, 3)$ แทนลงในสมการทั่วไป จะได้

$$0^2 + 3^2 + A(0) + B(3) + C = 0$$

$$3B + C = -9 \quad \text{..... (3)}$$

นำ (1) - (2) จะได้

$$A + C = -1 \quad -$$

$$-2A - B + C = -5$$

$$3A + B = 4 \quad \text{..... (4)}$$

นำ (2) - (3) จะได้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$\begin{aligned} -2A - B + C &= -5 \\ 3B + C &= -9 \\ -2A - 4B &= 4 \quad \text{..... (5)} \end{aligned}$$

นำ $4 \times (4) + (5)$ จะได้

$$\begin{aligned} (4) \times (3A + B) &= (4) \times (4) + \\ -2A - 4B &= 4 \end{aligned}$$

$$10A = 20$$

$$A = \frac{20}{10} = 2$$

แทน $A = 2$ ใน (1) จะได้

$$2 + C = -1$$

$$C = -3$$

แทน $C = -3$ ใน (3) จะได้

$$3B - 3 = -9$$

$$B = \frac{-6}{3} = -2$$

แทน $A = 2$, $B = -2$ และ $C = -3$ ลงในสมการวงกลมรูปทั่วไป จะได้สมการวงกลมที่ผ่านจุดที่ต้องการ คือ $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

ตัวอย่างที่ 1.23 จากสมการวงกลมนี้ $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ

วิธีที่ 1 จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$ จัดรูปสมการให้เป็นแบบมาตรฐานโดย

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) = -1$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) = -1 + 1 + 25$$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \quad \text{เทียบกับ } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \text{ จะได้}$$

จุดศูนย์กลางของวงกลม $(h, k) = (1, 5)$ และรัศมีของวงกลม $r = 5$ เมื่อนำไปวาดกราฟ จะได้

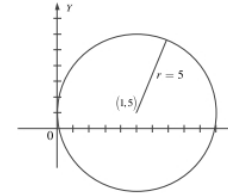
Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

วิธีที่ 2 โดยใช้สูตรจากสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$$

$$\text{เทียบกับ } x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

จะได้ $A = -2$, $B = -10$ และ $C = 1$



$$\text{แทนค่าในสูตรหาจุดศูนย์กลาง } (h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{-10}{2}\right) = (1, 5)$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่าในสูตรหาลำดับ } r &= \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-10)^2 - 4(1)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 100 - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลม $(h, k) = (1, 5)$ และรัศมีของวงกลม $r = 5$ เช่นเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.24 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(3, 5)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่เดียวกับจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$

วิธีทำ

หาจุดศูนย์กลางของสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$ โดย

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 6y) = -9$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = -9 + 9 + 9$$

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$$

จะได้จุดศูนย์กลางของสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$ เป็นจุด $(3, -3)$

สามารถหาลำดับของสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(3, 5)$ โดยหาระยะทางระหว่างจุด $(3, 5)$ และจุด $(3, -3)$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(3-3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{0+64} = 8$$

หาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(3, 5)$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(3, -3)$ มีรัศมีเท่ากับ $r = 8$ แทนค่าในสมการวงกลมรูปแบบมาตรฐานจะได้

$$(x - 3)^2 + (y - (-3))^2 = 8^2$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

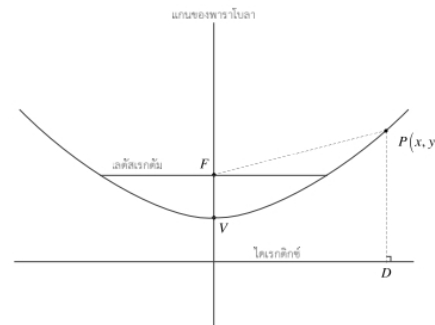


$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = 64$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y - 46 = 0$$

1.11.2 สมการพาราโบลา

พาราโบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ จากภาพที่ 1.21 แสดงพาราโบลาที่ขนานกับแกน Y



ภาพที่ 1.21 ลักษณะของกราฟพาราโบลาหงาย

จากภาพที่ 1.21 กำหนดให้กราฟพาราโบลาเป็นแบบหงาย สามารถอธิบายลักษณะที่สำคัญได้ดังนี้

1. เส้นตรงคงที่ เรียกว่าไดเรกทริกซ์ (directrix) จากภาพที่ 1.23 คือเส้นตรง D
2. จุดคงที่ เรียกว่า จุดโฟกัส (focus) จากภาพที่ 1.21 คือจุด F
3. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกทริกซ์ เรียกว่า แกนพาราโบลา
4. จุดที่กราฟพาราโบลาคัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่าจุดยอด (vertex) แทนด้วย V
5. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาที่จุด F และปลายของเส้นตรงทั้งสองด้านอยู่บนกราฟของพาราโบลา เรียกว่า เส้นลatus rectum (latus rectum)

กำหนดให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนกราฟพาราโบลา และจุด F เป็นจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นไดเรกทริกซ์ จากคำจำกัดความของพาราโบลาละได้ว่า จุด P อยู่บนกราฟพาราโบลาก็ต่อเมื่อระยะทาง $PD = PF$

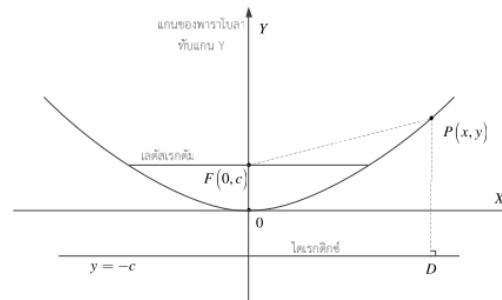
Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



สมการแบบมาตรฐานของพาราโบลา

กรณีที่ 1 พาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด

จากภาพที่ 1.22 กำหนดให้จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่จุด $V(0,0)$ แกนของพาราโบลาตั้งฉากกับแกน Y ให้จุดโฟกัสคือจุด $F(0,c)$ พาราโบลามีสมการไคเรตริกซ์คือ $y = -c$ และ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จากคำจำกัดความของพาราโบลา จะได้



ภาพที่ 1.22 กราฟพาราโบลาหงาย

$$PD = PF$$

$$|y - (-c)| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

$$|y+c| = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$|y+c|^2 = x^2 + (y-c)^2$$

$$(y+c)^2 = x^2 + (y-c)^2$$

$$y^2 + 2cy + c^2 = x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

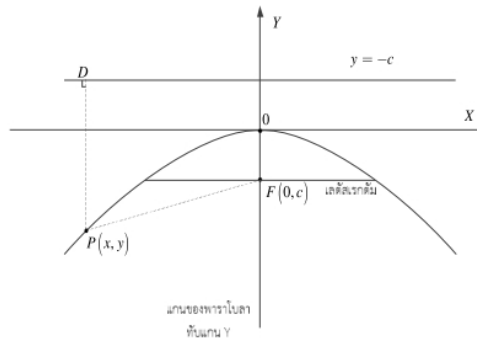
$$\cancel{y^2} + 2cy + \cancel{c^2} - 2cy - \cancel{c^2} = x^2$$

$$x^2 = 4cy$$

(1.25)

สมการที่ (1.25) เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด $V(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,c)$ สมการไคเรตริกซ์เป็น $y = -c$ และแกนของพาราโบลาตั้งฉากกับแกน Y เช่นเดียวกันจากสมการที่ (1.25) ถ้า $c > 0$ กราฟเป็นพาราโบลาหงาย และถ้า $c < 0$ กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ ดังแสดงในภาพที่ 1.22 และ 1.23 ตามลำดับ

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



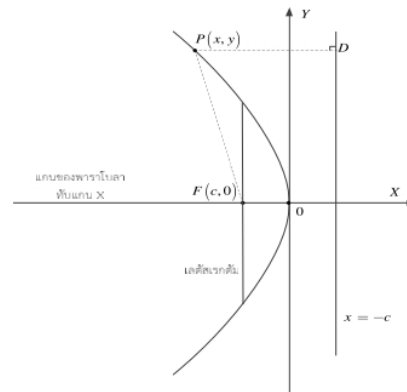
ภาพที่ 1.23 กราฟพาราโบลาคว่ำ

ในลักษณะคล้าย ๆ กัน ถ้าให้แกนของพาราโบลาทับแกน X โดยที่จุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(c,0)$ และสมการไคเรตริกซ์เป็น $x = -c$ ดังภาพที่ 1.24 และ 1.25 สามารถหาสมการพาราโบลาได้จาก $PD = PF$ จะได้

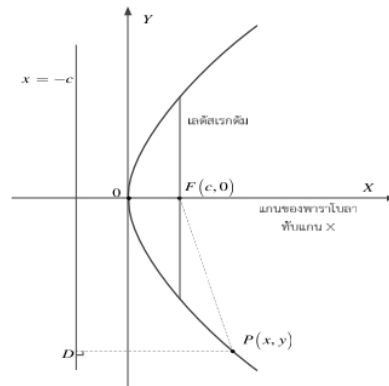
$$\begin{aligned} |x - (-c)| &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\ |x+c| &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ |x+c|^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\ (x+c)^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2cx + c^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} &= \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + y^2 \\ y^2 &= 4cx \end{aligned} \quad (1.26)$$

สมการที่ (1.26) เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด $V(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(c,0)$ สมการไคเรตริกซ์เป็น $x = -c$ และแกนของพาราโบลาทับแกน X เช่นเดียวกันจากสมการที่ (1.26) ถ้า $c > 0$ กราฟเป็นพาราโบลาเต้แค้งขวา และถ้า $c < 0$ กราฟเป็นพาราโบลาเต้แค้งซ้าย ดังแสดงในภาพที่ 1.24 และ 1.25 ตามลำดับ

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.24 กราฟพาราโบลาหงาย



ภาพที่ 1.25 กราฟพาราโบลาคว่ำ

การหาความยาวของลาตัสเรกตัม

จากภาพที่ 1.26 กำหนดให้ EE' เป็นความยาวของลาตัสเรกตัม ให้จุด E และจุด V เป็นจุดบนพาราโบลา จะได้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$FV = VD' = c \text{ หน่วย}$$

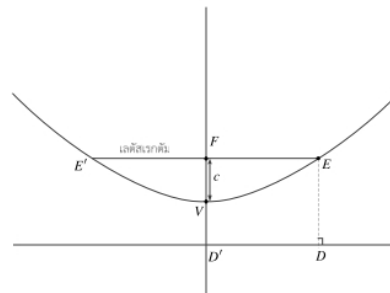
$$ED = EF = FD' = 2FV = 2c \text{ หน่วย}$$

จะได้ว่า

$$EE' = 2EF = 2(2c) = 4c \text{ หน่วย}$$

เนื่องจากค่า c อาจจะมี $c > 0$ หรือ $c < 0$ กล่าวได้ว่าพาราโบลาทั้ง 4 รูปแบบ จะมีความยาวของลาตัสเรกตัม เป็น $|4c|$ ใส่ค่าสัมบูรณ์ความยาวของลาตัสเรกตัมมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้น

$$\text{ความยาวลาตัสเรกตัม} = |4c| \quad (1.27)$$



ภาพที่ 1.26 ความยาวของลาตัสเรกตัม

ตารางที่ 1.1 สรุปสูตรพาราโบลากรณีจุดยอดเป็นจุดกำเนิด

ลักษณะของพาราโบลา	สมการพาราโบลา	สมการไดเรกตริกซ์	จุดโฟกัส	ความยาว ลาตัสเรกตัม
หงาย ($c > 0$)	$x^2 = 4cy$	$y = -c$	$(0, c)$	4c
คว่ำ ($c < 0$)				
ตะแคงขวา ($c > 0$)	$y^2 = 4cx$	$x = -c$	$(c, 0)$	
ตะแคงซ้าย ($c < 0$)				

กรณีที่ 2 พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ไม่ใช่จุดกำเนิด

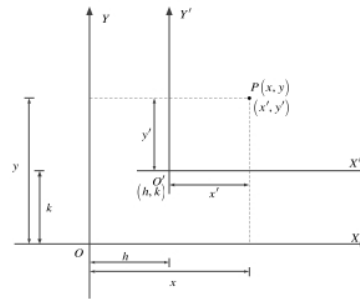
ในกรณีนี้จำเป็นต้องทราบวิธีการเลื่อนแกน เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา หรือพิสูจน์หา

สมการพาราโบลาที่จุดยอดไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

การเลื่อนแกนหรือการย้ายแกน

โดยปกติ จะกำหนดให้แกน X และ Y เป็นแกนในระนาบ มีจุดกำเนิดที่จุด O ต้องการเลื่อนแกนใหม่ให้ขนานกับแกนเดิมเป็นแกน X' และ Y' มีจุดกำเนิดใหม่คือจุด O' ที่พิกัด (h, k) ดังแสดงในภาพที่ 1.27 และให้ $P(x, y)$ เป็นจุดที่อยู่ในระนาบเดิม เมื่อเทียบกับแกนใหม่จะได้จุด $P(x', y')$



ภาพที่ 1.27 การเลื่อนแกน

ดังนั้น สามารถเขียนความสัมพันธ์ของระนาบเดิมกับระนาบใหม่ได้ดังนี้

$$x = h + x' \quad \text{และ} \quad y = k + y'$$

$$x' = x - h \quad \text{และ} \quad y' = y - k$$

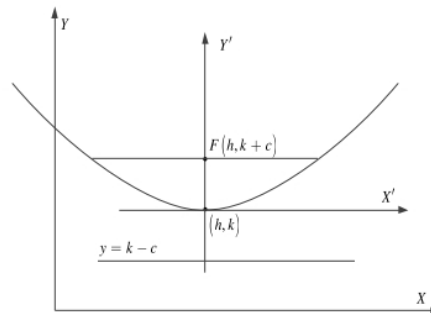
กรณีพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (h, k) สามารถใช้การเลื่อนแกนหาสมการของพาราโบลาโดยพิจารณาจากสมการที่ (1.25) และ (1.26) $x^2 = 4cy$ และ $y^2 = 4cx$ ตามลำดับ พิจารณา สมการที่ (1.25) แทนค่า $x = x' + h$ และ $y = y' + k$ จะได้

$$(x')^2 = 4c(y')$$

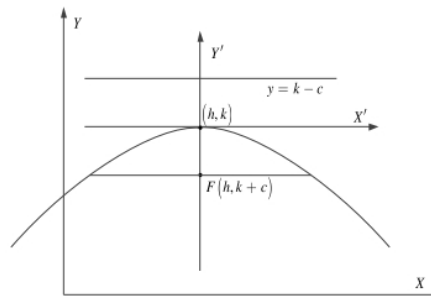
$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \quad (1.28)$$

สมการที่ (1.28) เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด $V(h, k)$ จุดโฟกัสที่จุด $F(h, k+c)$ สมการไดเรกทริกซ์คือ $y = k - c$ และแกนของพาราโบลาวขนานกับแกน Y สมการที่ (1.28) กรณีที่ $c > 0$ เป็นกราฟพาราโบลาหงาย และถ้า $c < 0$ เป็นพาราโบลาคว่ำ ดังแสดงในภาพที่ 1.28 และ 1.29 ตามลำดับ

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.28 กราฟพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดที่จุด (h, k)



ภาพที่ 1.29 กราฟพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดที่จุด (h, k)

พิจารณา สมการที่ (1.26) แทนค่า $x = x' + h$ และ $y = y' + k$ จะได้

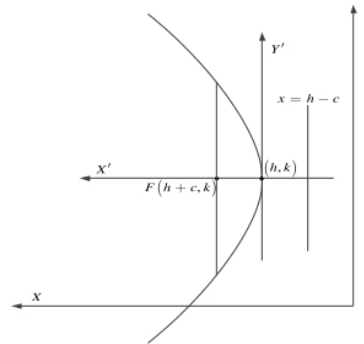
$$(y')^2 = 4c(x')$$

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

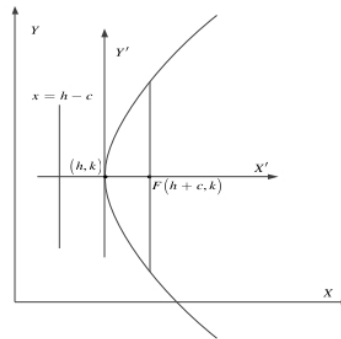
(1.29)

สมการที่ (1.29) เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด $V(h, k)$ จุดโฟกัสที่จุด $F(h + c, k)$ สมการไดเรกทริกซ์คือ $x = h - c$ และแกนของพาราโบลานานกับแกน X สมการที่ (1.29) กรณีที่ $c > 0$ เป็นพาราโบลาตะแคงขวา และถ้า $c < 0$ เป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย ดังแสดงในภาพที่ 1.30 และ 1.31 ตามลำดับ

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.30 กราฟพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดที่จุด (h, k)



ภาพที่ 1.31 กราฟพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดที่จุด (h, k)

พาราโบลาทุกกราฟ สามารถหาความยาวของลาตัสเฟกต์ได้จาก สมการที่ (1.27)

$$\text{ความยาวลาตัสเฟกต์} = |4c|$$

สมการแบบทั่วไปของพาราโบลา

โดยพิจารณาจากสมการที่ (1.28) และ (1.29) นำมากระจายพจน์ จะได้

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



จากสมการที่ (1.28) $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4cy - 4ck$$

$$x^2 - 2hx - 4cy + h^2 + 4ck = 0$$

$$x^2 + (-2h)x + (-4c)y + (h^2 + 4ck) = 0 \quad (1.30)$$

แทนค่า $D = (-2h)$, $E = (-4c)$ และ $F = (h^2 + 4ck)$ จะได้

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

จากสมการที่ (1.29) $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4cx - 4ch$$

$$y^2 - 2ky - 4cx + k^2 + 4ch = 0$$

$$y^2 + (-2k)y + (-4c)x + (k^2 + 4ch) = 0$$

แทนค่า $D = (-2k)$, $E = (-4c)$ และ $F = (k^2 + 4ch)$ จะได้

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.31)$$

ข้อสังเกต ลักษณะของสมการพาราโบลา คือ

- มีสองตัวแปรคือ x และ y ถ้าตัวแปรตัวใด ๆ ตัวหนึ่งมีกำลังสูงสุดเป็น 2 อีกตัวแปรจะมีกำลังเป็น 1
- ในสมการพาราโบลาจะไม่มีการเป็นกำลังตัวแปร xy
- พาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดศูนย์กลาง สมการจะมี 2 พจน์
- พาราโบลาหงายหรือคว่ำ และ พาราโบลาตะแคงขวาหรือซ้าย จะมีสมการมาตรฐานเหมือนกัน ต่างกันที่เครื่องหมายบวกหรือลบ

ตารางที่ 1.2 สรุปสูตรพาราโบลากรณีจุดยอดไม่ใช่จุดกำเนิด

ลักษณะของพาราโบลา	สมการพาราโบลา	สมการโดเรกตรีกซ์	จุดโฟกัส	ความยาว ลาตัสเรกตัม	
หงาย ($c > 0$)	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	$y = k - c$	$(h, k + c)$	4c	
คว่ำ ($c < 0$)					
ตะแคงขวา ($c > 0$)	$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	$x = h - c$	$(h + c, k)$		
ตะแคงซ้าย ($c < 0$)					

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 1.25 จากสมการพาราโบลา $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ จงหา จุดยอด จุดโฟกัส เส้นตรงไดเรกทริกซ์ และราตัสเรกตัม

วิธีทำ

จากสมการ $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ จัดรูปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x = -4y - 1$$

$$x^2 - 6x + 9 = -4y - 1 + 9 \quad \text{บวกด้วย 9 ทั้งสองข้างของสมการ}$$

$$(x - 3)^2 = -4y + 8$$

$$(x - 3)^2 = -4(y - 2)$$

เทียบกับ $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ เป็นพาราโบลาคว่ำ หรือหงาย โดยพิจารณา $4c = -4$ ค่า $c = -1$ ซึ่งน้อยกว่า 0 ($c < 0$) ดังนั้นจึงสรุปว่าเป็นพาราโบลาคว่ำ

จุดยอดของพาราโบลาเป็น (h, k) เท่ากับ $(3, 2)$

จุดโฟกัสของพาราโบลาเป็น $(h, k + c)$ เท่ากับ $(3, 1)$

เส้นตรงไดเรกทริกซ์ $y = k - c$ เท่ากับ $y = 3$

ลาตัสเรกตัม $|4c|$ เท่ากับ $|-4| = 4$

ตัวอย่างที่ 1.26 จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีแกนของพาราโบลานานกับแกน x และผ่านจุด $(8, -1)$ $(5, 1)$ และ $(5, 5)$

วิธีทำ

กราฟพาราโบลานานกับแกน x จึงทราบว่าเป็นพาราโบลาตะแคงขวาหรือซ้าย จึงใช้สมการทั่วไป $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ แล้วใช้หลักการกราฟพาราโบลาผ่านจุดทั้ง 3 นั้นจะต้องสอดคล้องกับสมการที่ (1.31)

ผ่านจุด $(8, -1)$ จะได้ $(-1)^2 + D(8) + E(-1) + F = 0$

$$8D - E + F = -1 \quad \text{----- (1)}$$

ผ่านจุด $(5, 1)$ จะได้ $(1)^2 + D(5) + E(1) + F = 0$

$$5D + E + F = -1 \quad \text{----- (2)}$$

ผ่านจุด $(5, 5)$ จะได้ $(5)^2 + D(5) + E(5) + F = 0$

$$5D + 5E + F = -5 \quad \text{----- (3)}$$

นำสมการ (1) - (2) จะได้

$$3D - 2E = 0 \quad \text{----- (4)}$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



นำสมการ (2) - (3) จะได้

$$-4E = 4$$

$$E = \frac{-4}{4} = -1$$

แทน $E = -1$ ในสมการ (4) จะได้

$$3D - 2(-1) = 0$$

$$3D + 2 = 0$$

$$D = \frac{-2}{3}$$

แทน $E = -1$ และ $D = \frac{-2}{3}$ ในสมการ (1) จะได้ $8\left(\frac{-2}{3}\right) - (-1) + F = -1$

$$\frac{-16}{3} + 1 + F = -1$$

$$F = -2 + \frac{16}{3} = \frac{-6+16}{3} = \frac{10}{3}$$

แทน $D = \frac{-2}{3}$, $E = -1$ และ $F = \frac{10}{3}$ ลงในสมการพาราโบลาทั่วไป จะได้

$$y^2 - \frac{2x}{3} - y + \frac{10}{3} = 0 \quad \text{หรือ} \quad 3y^2 - 2x - 3y + 10 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.27 จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัส $F(-2, -1)$ และมีจุดปลายของลาตัสเรกตัมอยู่ที่

จุด $(-4, -1)$ และ $(0, -1)$

วิธีทำ

พิจารณาจากจุด โฟกัส $F(-2, -1)$ และจุดปลายของลาตัสเรกตัมอยู่ที่จุด $(-4, -1)$ และ $(0, -1)$ พบว่าเส้นลาตัสเรกตัมขนานกับแกน x ทำให้ทราบว่าแกนของพาราโบลาจะต้องขนานกับแกน y เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำหรือหงาย สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเป็น

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

หาความยาวของลาตัสเรกตัม จากจุดปลายทั้งสองด้าน $(-4, -1)$ และ $(0, -1)$ จะได้

$$d = \sqrt{((-1) - (-1))^2 + (0 - (-4))^2}$$

$$d = \sqrt{(0)^2 + (4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

เพราะฉะนั้น ความยาวลาตัสเรกตัม $|4c| = 4$

$$c = \pm 1$$

ถ้า $c = +1$ จะได้ จุดยอดเป็น $V(-2, -2)$ สมการพาราโบลาเป็น

$$(x - (-2))^2 = 4(1)(y - (-2))$$

$$(x + 2)^2 = 4(y + 2)$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$x^2 + 4x + 4 = 4y + 8$$

$$x^2 + 4x - 4y - 4 = 0$$

ถ้า $c = -1$ จะได้ จุดยอดเป็น $V(-2, 0)$ สมการพาราโบลาเป็น

$$(x - (-2))^2 = 4(-1)(y - 0)$$

$$(x + 2)^2 = -4(y)$$

$$x^2 + 4x + 4 = -4y$$

$$x^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.28 จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัส $F(4, -2)$ และมีจุดยอด $V(1, -2)$

วิธีทำ

จากจุดยอด $V(1, -2)$ และจุดโฟกัส $F(4, -2)$ พบว่ามีการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน x ดังนั้น พหุนามของพาราโบลายานกับแกน x เช่นกัน เทียบกับ $V(h, k)$ และ $F(h + c, k)$ ทำให้ทราบค่า $c = 3$

พาราโบลายานกับแกน x ใช้สูตร $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ แทนค่า จะได้

$$(y - (-2))^2 = 4(3)(x - 1)$$

$$y^2 + 4y + 4 = 12(x - 1)$$

$$y^2 + 4y + 4 = 12x - 12$$

$$\text{จะได้สมการ } y^2 - 12x + 4y + 16 = 0$$

1.11.2 สมการวงรี

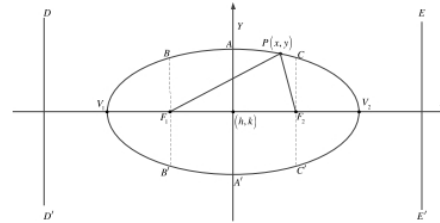
วงรี คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ ภาพที่ 1.32 แสดงรูปวงรีที่ขนานกับแกน x โดยที่

1. จุดคงที่สองจุด เรียกว่า จุดโฟกัส (focus) จากภาพที่ 1.32 เขียนแทนด้วยจุด F_1 และจุด F_2
2. จุดศูนย์กลาง (center) คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง ในที่นี้คือจุด (h, k)
3. จุดยอด (vertex) คือ จุดที่เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสทั้งสองตัดกับกราฟของวงรี ในที่นี้คือจุด V_1 และ V_2

คือจุด V_1 และ V_2

4. แกนเอก (major axis) คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสอง ในที่นี้คือ เส้นตรง V_1V_2 หรือเรียกว่าแกนยาว

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.32 ลักษณะรูปวงรีขนานกับแกน x

5. แกนโท (minor axis) คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับแกนเอกและผ่านจุดศูนย์กลาง โดยมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนกราฟวงรีที่จุด A และจุด A' นั่นคือ เส้นตรง AA' หรือเรียกว่าแกนสั้น

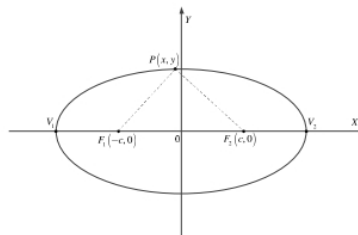
6. เลตัสเรกตัม (Latus Rectum) คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอกมี 2 เส้นดังภาพที่ 1.32 คือ เส้นตรง BB' และเส้นตรง CC'

7. ไดเรกตริกซ์ (directrix) คือเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแนวแกนเอก อยู่นอกวงรีเป็นระยะห่างจากจุดยอดไปยังเส้นไดเรกตริกซ์ในแนวตั้งฉากเท่ากับระยะห่างจากจุดยอดกับจุดโฟกัส หรือเรียกว่าเส้นบังคับ ดังภาพที่ 1.32 มีเส้นไดเรกตริกซ์ 2 เส้น เป็นเส้นตรง DD' และเส้นตรง EE'

8. ค่าความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) หรือค่าความรี คือ อัตราส่วนของระยะทางจากจุด P ถึงจุดคงที่ ต่อระยะทางจากจุด P ถึงเส้นตรงคงที่ แทนด้วย e

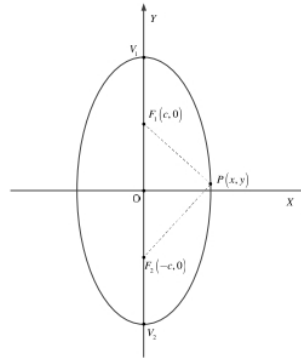
สมการแบบมาตรฐานของวงรี

กรณีที่ 1 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด สำหรับวงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน x จะมีสมการ จากนิยาม ผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีใด ๆ ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่เสมอ



ภาพที่ 1.33 รูปวงรีแกนเอกหรือแกนยาวขนานกับแกน x

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.34 วงรีแกนเอกหรือแกนยาวขนานกับแกน x

จะได้ว่า

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2) + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2) + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ด้าน จะได้

$$\left[\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2) + y^2} \right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + [(x-c)^2 + y^2]$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ด้าน จะได้

$$(cx - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

หารด้วย $a^2(a^2 - c^2)$ ทั้งสองข้าง จะได้ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$

กำหนดให้ $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้สมการวงรีเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.32)$$

สมการที่ (1.32) เป็นสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและแกนยาวทับแกน x ดังภาพที่ 1.33 ในทำนองเดียวกัน สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและแกนยาวทับแกน y ดังภาพที่ 1.34 มีสมการวงรีเป็นดังสมการที่ (1.33)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (1.33)$$

$$\text{ความยาวแกนยาว} = 2a \quad (1.34)$$

$$\text{ความยาวแกนสั้น} = 2b \quad (1.35)$$

$$\text{ความยาวลาตัสเรกตัม} = \frac{2b^2}{a} \quad (1.36)$$

$$\text{สมการไคเรตริกซ์} = x = \pm \frac{a}{e} \quad (1.37)$$

$$\text{ความเยื้องศูนย์กลาง} = e = \frac{c}{a} \quad (1.38)$$

ข้อสังเกต ของสมการวงรี

1. มีตัวแปร 2 ตัว สมมติเป็น x และ y กำลังสูงสุดของตัวแปรเท่ากับ 2 ทั้งสองตัว
2. สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ไม่เท่ากัน แต่มีเครื่องหมายเหมือนกัน
3. ไม่มีพจน์ที่เป็นตัวแปร xy
4. ถ้าไม่มีพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y จะเป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด
5. จาก $a > b$ ดังนั้น ในสมการมาตรฐาน ถ้าตัวแปรใดมีตัวส่วนมากกว่าแสดงว่าแกนยาว

ของวงรีจะทับหรือขนานกับแกนของตัวแปรนั้น

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



กรณีที่ 2 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางไม่ใช่ที่จุดกำเนิด ตามตารางที่ 1.3 สรุปสูตรวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

ตารางที่ 1.3 สรุปสูตรวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

สูตร	ลักษณะแกนยาว	สูตร	สูตร
		แกนยาวขนานแกน x	แกนยาวขนานแกน y
สมการวงรี		$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
จุดยอด		$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
จุดโฟกัส		$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
สมการไทรแอดริกซ์		$(x-h) = \pm \frac{a}{e}$	$(y-k) = \pm \frac{a}{e}$
ความยาวของแกนยาว		$2a$	
ความยาวของแกนสั้น		$2b$	
ความยาวของลาตัสเทรม์		$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง		$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ a, b, c		$b^2 = a^2 - c^2$	

สมการแบบทั่วไปของวงรี

จากสมการวงรีแบบมาตรฐานที่มีจุดศูนย์กลางเป็น (h, k) จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2)}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 + (-2b^2h)x + (-2a^2k)y + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

เมื่อกำหนดให้ $A = b^2$, $B = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ และ $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$ ดังนั้น

สมการแบบรูปทั่วไปของวงรีคือ

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(1.39)

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ตัวอย่างที่ 1.29 จากสมการวงรี $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ จงหาศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนยาว ความยาวของแกนสั้น ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไคเรตริกซ์ พร้อมเขียนรูปประกอบ

วิธีทำ

$$\text{จากสมการมาตรฐานของวงรี } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\text{เทียบกับโจทย์ } \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = \frac{(x-4)^2}{3^2} + \frac{(y-(-1))^2}{5^2} = 1$$

$$\text{จะได้ } a = 5, b = 3 \text{ สามารถหาค่า } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{และความเยื้องศูนย์กลาง } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\text{จุดศูนย์กลางคือ } (h, k) \text{ เท่ากับ } (4, -1)$$

$$\text{จุดยอดคือ } (h, k \pm a) \text{ เท่ากับ } (4, -1 \pm 5) \text{ จะได้ } (4, 4) \text{ และ } (4, -6)$$

$$\text{จุดโฟกัสคือ } (h, k \pm c) \text{ เท่ากับ } (4, -1 \pm 4) \text{ จะได้ } (4, 3) \text{ และ } (4, -5)$$

$$\text{สมการไคเรตริกซ์ คือ } (y-k) = \pm \frac{a}{e} \text{ เท่ากับ } (y+1) = \pm \frac{5}{4/5}$$

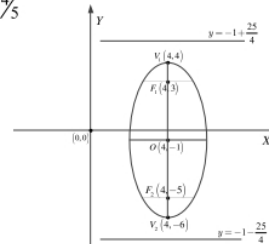
$$y = -1 \pm \frac{25}{4}$$

$$\text{ความยาวลาตัสเรกตัมคือ } \frac{2b^2}{a} \text{ เท่ากับ } = \frac{2(3^2)}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\text{ความยาวของแกนยาวคือ } 2a \text{ เท่ากับ } 2a = 10$$

$$\text{ความยาวของแกนสั้นคือ } 2b \text{ เท่ากับ } 2b = 6$$

สามารถเขียนรูปของวงรีได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1.30 จากสมการวงรี $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y - 72 = 0$ จงหาศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนยาว ความยาวของแกนสั้น ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไคเรตริกซ์ พร้อมเขียนรูปประกอบ

วิธีทำ

จาก $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y - 72 = 0$ จัดรูปให้เป็นสมการวงรีรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$4x^2 + 24x + 9y^2 - 36y = 72$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$4(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) = 72$$

$$4(x^2 + 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = 72 + 36 + 36$$

$$4(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 144$$

$$\frac{4(x+3)^2}{144} + \frac{9(y-2)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

เทียบกับสมการมาตรฐานของวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{16} = \frac{(x-(-3))^2}{6^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$

จะได้ $a = 6, b = 4$ สามารถหาค่า $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

และความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

จุดศูนย์กลางคือ (h, k) เท่ากับ $(-3, 2)$

จุดยอดคือ $(h \pm a, k)$ เท่ากับ $(-3 \pm 6, 2)$ จะได้ $(3, 2)$ และ $(-9, 2)$

จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, k)$ เท่ากับ $(-3 \pm 2\sqrt{5}, 2)$ จะได้ $(-3 + 2\sqrt{5}, 2)$ และ $(-3 - 2\sqrt{5}, 2)$

สมการไดเรกทริกซ์ คือ $(x-h) = \pm \frac{a}{e}$ เท่ากับ $(x+3) = \pm \frac{6}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

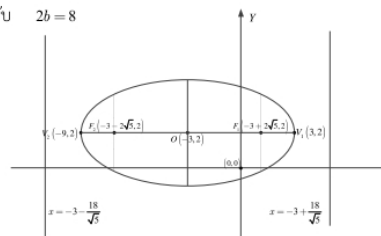
$$x = -3 \pm \frac{18}{\sqrt{5}}$$

ความยาวลาตัสเรกตัมคือ $\frac{2b^2}{a}$ เท่ากับ $\frac{2(4^2)}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

ความยาวของแกนยาวคือ $2a$ เท่ากับ $2a = 12$

ความยาวของแกนสั้นคือ $2b$ เท่ากับ $2b = 8$

สามารถเขียนรูปของวงรีได้ดังนี้



Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

ตัวอย่างที่ 1.31 จงหาสมการวงรีเมื่อกำหนดให้ $F_1(2, -1)$, $F_2(2, 7)$ จุดปลายแกนสั้นคือ จุด $(0, 3)$ และ $(4, 3)$

วิธีทำ

จากจุดปลายของแกนสั้นคือ จุด $(0, 3)$ และ $(4, 3)$ แสดงว่าจุดกึ่งกลางคือจุดศูนย์กลางของวงรี ดังนั้นสามารถหาจุดกึ่งกลางได้ดังนี้

$$\text{จุดกึ่งกลางตามแนวแกน} \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

$$\text{และจุดกึ่งกลางตามแนวแกน} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $O(2, 3)$

สามารถหาระยะทาง b โดยพิจารณาจาก จุดศูนย์กลางกับจุดปลายของแกนสั้นด้านใดด้านหนึ่งก็ได้ระยะ b ดังนี้

$$b = \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

จะได้ $b = 2$

สามารถหาระยะทาง c โดยพิจารณาจาก จุดศูนย์กลางกับจุดโฟกัสด้านใดด้านหนึ่งก็ได้ระยะ c ดังนี้

$$c = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

จะได้ $c = 4$

$$\begin{aligned} \text{จากความสัมพันธ์ } b^2 = a^2 - c^2 \text{ สามารถหาค่า } a &= \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

จะได้ $a = 2\sqrt{5}$

ดังนั้นสามารถหาสมการวงรี ได้ดังนี้ จาก $O(2, 3)$, $b = 2$ และ $a = 2\sqrt{5}$

แทนค่าในสมการมาตรฐาน $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ จะได้ พิจารณาจุดโฟกัส จุดศูนย์กลางมี

การเปลี่ยนแปลงตามแกนยาว เป็นแกน X

$$\frac{(x - 2)^2}{2^2} + \frac{(y - 3)^2}{(2\sqrt{5})^2} = 1$$

$$\text{สมการวงรีรูปมาตรฐาน} \quad \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{20} = 1$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



และเขียนสมการวงรีในรูปทั่วไป จะได้

$$\frac{20(x-2)^2}{20(4)} + \frac{4(y-3)^2}{4(20)} = 1$$

$$\frac{20(x-2)^2 + 4(y-3)^2}{80} = 1$$

$$20(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 80$$

$$20(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 6y + 9) = 80$$

$$20x^2 - 80x + 80 + 4y^2 - 24y + 36 = 80$$

$$\text{สมการวงรีรูปทั่วไป} \quad 20x^2 + 4y^2 - 80x - 24y + 36 = 0$$

1.11.4 สมการไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุด (จะเรียกว่า จุดโฟกัส) บนระนาบจะมีค่าคงตัวเสมอและมากกว่าศูนย์ จากภาพที่ 1.35 แสดงไฮเพอร์โบลาที่ขนานกับแกน x โดยที่

1. จุดโฟกัส คือ จุดคงที่ที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากับ $|c|$ ในที่นี้คือ จุด F_1 และ F_2
2. จุดศูนย์กลาง คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง นั่นคือ จุด $(h,k) = O$
3. จุดที่เส้นตรง F_1F_2 ตัดไฮเพอร์โบลา เรียกว่าจุดยอด แทนด้วย V_1 และ V_2
4. เส้นตรง V_1V_2 เรียกว่า แกนตามขวาง
5. เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง $(h,k) = O$ และตั้งฉากกับแกนตามขวางเรียกว่า แกนสังยุค
6. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนตามขวางมี 2 เส้น เรียกว่า ลาดัสเรกตัม

เขียนแทนด้วย RR' ตามภาพที่ 1.35

7. เส้นตรง DD' และ EE' เรียกว่า ไดรেকทริกซ์
8. เส้นตรง GH และ ST เรียกว่า เส้นกำกับ

สมการแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา

กรณีที่ 1 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด $(0,0)$ และแกนตามขวางขนานแกน X ดังภาพที่ 1.35 กำหนดให้จุดโฟกัสคือ $F_1(c,0)$ และ $F_2(-c,0)$ เมื่อ $c > 0$ กำหนดให้จุด $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาดังนั้นจากนิยามของไฮเพอร์โบลา ผลต่างของระยะทางจากจุด P ถึงจุด F_1 และ F_2 มีค่าคงที่เสมอ แสดงได้ดังนี้

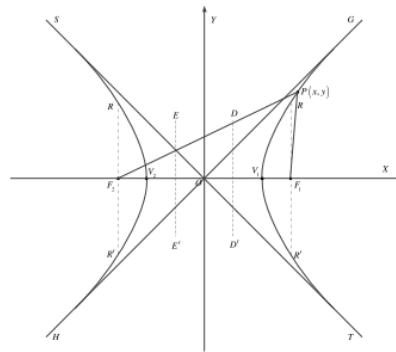
$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง จะได้



ภาพที่ 1.35 ไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางขนานแกน X

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= \left[(2a) + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ cx - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned}(cx - a^2)^2 &= \left[a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 \\ c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\ c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)\end{aligned}$$

หารด้วย $a^2(c^2 - a^2)$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

กำหนดให้ $b^2 = c^2 - a^2$ เมื่อ $b > 0$ จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.40)$$

สมการที่ (1.40) เป็นสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและแกนตามขวางทับแกน X ดังภาพที่ 1.35 ในทำนองเดียวกัน สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและแกนตามขวางทับแกน Y ดังภาพที่ 1.36 มีสมการไฮเพอร์โบลาเป็นดังสมการที่ (1.41)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (1.41)$$

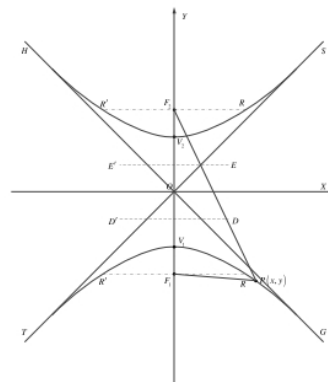
$$\text{ความยาวของแกนตามขวาง} \quad 2a \quad (1.42)$$

$$\text{ความยาวของแกนสังยุค} \quad 2b \quad (1.43)$$

$$\text{ความยาวของลาตัสเรกตัม} \quad \frac{2b^2}{a} \quad (1.44)$$

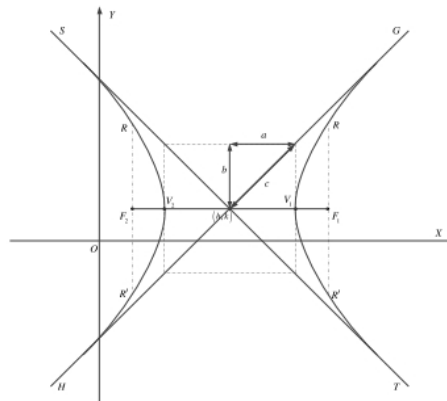
$$\text{สมการไดเรกตริกซ์} \quad x = \pm \frac{a}{e} \quad (1.45)$$

$$\text{ความเยื้องศูนย์กลาง} \quad e = \frac{c}{a} \quad (1.46)$$



ภาพที่ 1.36 ไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางขนานแกน Y

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ภาพที่ 1.37 ไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางขนานแกน X มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k)

ตารางที่ 1.4 สรุปสูตรไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด

ลักษณะแกนยาว	สูตร	
	แกนตามขวางทับแกน x	แกนตามขวางทับแกน y
สมการไฮเพอร์โบลา	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
จุดยอด	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
จุดโฟกัส	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{a}{e}$
สมการเส้นกำกับ	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
ความยาวของแกนตามขวาง	$2a$	
ความยาวของแกนสั้นยุค	$2b$	
ความยาวของลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ของ a, b, c	$b^2 = c^2 - a^2$	

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



สมการแบบทั่วไปของไฮเพอร์โบลา

จากสมการไฮเพอร์โบลาแบบมาตรฐานที่มีจุดศูนย์กลางเป็น (h, k) จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2ky + k^2)}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 - a^2y^2 + 2a^2ky - a^2k^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 + (-2b^2h)x + (2a^2k)y + (b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

เมื่อกำหนดให้ $A = b^2$, $B = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = 2a^2k$ และ $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$ ดังนั้น สมการแบบรูปทั่วไปของไฮเพอร์โบลา คือ

$$Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.47)$$

กรณีที่ 2 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางไม่ใช่อันดับที่จุดกำเนิด ตามตารางที่ 1.5 สรุปสูตรไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

ตารางที่ 1.5 สรุปสูตรไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)

สูตร	ลักษณะแกนยาว	สูตร	สูตร
		แกนตามขวางทับแกน x	แกนตามขวางทับแกน y
สมการไฮเพอร์โบลา		$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด		$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
จุดโฟกัส		$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์		$(x-h) = \pm \frac{a}{e}$	$(y-k) = \pm \frac{a}{e}$
สมการเส้นกำกับ		$(y-k) = \pm \frac{b}{a}(x-h)$	$(y-k) = \pm \frac{a}{b}(x-h)$
ความยาวของแกนตามขวาง		$2a$	
ความยาวของแกนสังยุค		$2b$	
ความยาวของลาตัสเรกตัม		$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง		$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ของ a, b, c		$b^2 = c^2 - a^2$	

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



ข้อสังเกต ของสมการไฮเพอร์โบลา

1. มีตัวแปร 2 ตัว สมมติเป็น x และ y กำลังสูงสุดของตัวแปรเท่ากับ 2 ทั้งสองตัว
2. สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ไม่เท่ากัน และมีเครื่องหมายต่างกัน
3. ไม่มีพจน์ที่เป็นตัวแปร xy
4. ถ้าไม่มีพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y จะเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด
5. ในสมการมาตรฐาน ถ้าพจน์ของตัวแปรใดมีเครื่องหมายบวก แสดงว่าแกนตามขวางจะ

ทับหรือขนานกับแกนของตัวแปรนั้น

ตัวอย่างที่ 1.32 จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ จงหาศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนตามขวาง ความยาวของแกนลี้ยุค ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ และสมการไดเรกตริกซ์ พร้อมเขียนรูปประกอบ

วิธีทำ

จากสมการที่โจทย์กำหนด ให้เขียนเทียบรูปมาตรฐานแล้วหาค่า a , b และ c จากความสัมพันธ์ $b^2 = c^2 - a^2$

$$\text{จาก } \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

$$\text{เทียบกับ } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ เป็นสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด } (0,0) \text{ มี}$$

แกนตามขวางทับแกน y

$$\text{จะได้ } a = 5, b = 3 \text{ ดังนั้น } c = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{จุดศูนย์กลางคือ } (h, k) \quad \text{เท่ากับ } (0, 0)$$

$$\text{จุดยอดคือ } (\pm a, 0) \quad \text{เท่ากับ } (5, 0) \text{ และ } (-5, 0)$$

$$\text{จุดโฟกัสคือ } (\pm c, 0) \quad \text{เท่ากับ } (\sqrt{34}, 0) \text{ และ } (-\sqrt{34}, 0)$$

$$\text{ความยาวของแกนตามขวาง} \quad 2a = 10$$

$$\text{ความยาวของแกนลี้ยุค} \quad 2b = 6$$

$$\text{ความเยื้องศูนย์กลาง} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\text{ความยาวของลาตัสเรกตัม} \quad \frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$$

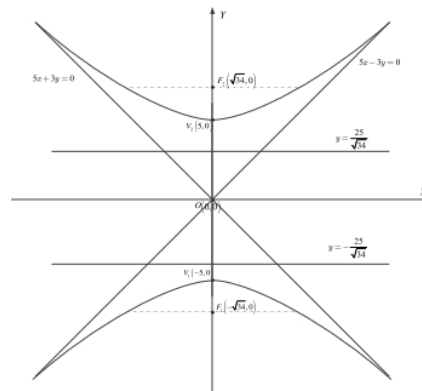
$$\text{สมการไดเรกตริกซ์} \quad y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{\frac{\sqrt{34}}{5}} = \pm \frac{25}{\sqrt{34}}$$

$$\text{สมการเส้นกำกับ} \quad y = \pm \frac{a}{b} x = \pm \frac{5}{3} x$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



เขียนรูปประกอบได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1.33 จากสมการไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0$ จงหาศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนยาว ความยาวของแกนสั้น ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไดเรกตริกซ์ พร้อมเขียนรูปประกอบ

วิธีทำ

จากโจทย์สมการไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0$ รูปทั่วไป จัดให้เป็นรูปมาตรฐาน แล้วหาค่า (h,k) a , b และ c ได้ดังนี้

$$9x^2 - 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0$$

$$9x^2 + 54x - 16y^2 + 32y = 209$$

$$(9x^2 + 54x) - (16y^2 - 32y) = 209$$

$$9(x^2 + 6x) - 16(y^2 - 2y) = 209$$

$$9(x^2 + 6x + 9) - 16(y^2 - 2y + 1) = 209 - 81 + 16$$

$$9(x+3)^2 - 16(y-1)^2 = 144$$

$$\frac{9(x+3)^2}{144} - \frac{16(y-1)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$\frac{(x+3)^2}{4^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

เทียบกับ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้ $h = -3$, $k = 1$

และ $a = 4$, $b = 3$ และ $c = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา (h, k) เท่ากับ $(-3, 1)$

จุดยอดคือ $(h \pm a, k)$ เท่ากับ $(1, 1)$ และ $(-7, 1)$

จุดโฟกัสคือ $(h \pm c, k)$ เท่ากับ $(2, 1)$ และ $(-8, 1)$

ความยาวของแกนตามขวาง $2a = 8$

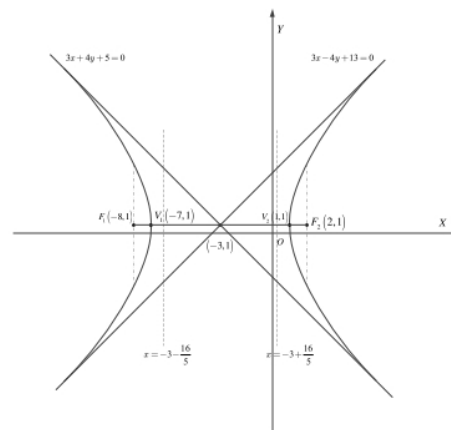
ความยาวของแกนตั้งฉาก $2b = 6$

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

ความยาวของลาตัสเรกตัม $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

สมการไดเรกตริกซ์ $(x-h) = \pm \frac{a}{e} = -3 \pm \frac{4}{5/4} = \pm \frac{16}{5}$

เขียนรูปประกอบได้ดังนี้



Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$\begin{aligned} \text{สมการเส้นกำกับ} \quad (y-k) &= \pm \frac{b}{a}(x-h) \\ (y-1) &= \frac{3}{4}(x+3) \quad \text{และ} \quad (y-1) = -\frac{3}{4}(x+3) \\ 4y-4 &= 3x+9 \quad \quad \quad 4y-4 = -3x-9 \\ 3x-4y+13 &= 0 \quad \quad \quad 3x+4y+5 = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.34 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดให้ จุดยอดเป็น $V_1(-1,2)$, $V_2(7,2)$ และจุดโฟกัสเป็น $F_1(-2,2)$, $F_2(8,2)$

วิธีทำ

จากโจทย์จุดยอดเป็น $V_1(-1,2)$, $V_2(7,2)$ สามารถหาจุดศูนย์กลาง คือจุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่างจุดยอดสองจุด จะได้ จุดศูนย์กลาง เท่ากับ $(h,k) = (3,2)$ คือ $h=3$ และ $k=2$
สามารถหาค่า a ได้จาก การหาระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางและจุดยอดใด ๆ จะได้

$$a = \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

สามารถหาค่า c ได้จาก การหาระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางและจุดโฟกัสใด ๆ จะได้

$$c = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

และจากความสัมพันธ์ a, b, c โดย $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

จากโจทย์จุดยอดเป็น $V_1(-1,2)$, $V_2(7,2)$ และจุดโฟกัสเป็น $F_1(-2,2)$, $F_2(8,2)$ ดังนั้นไฮเพอร์โบลามีความยาวของแกนตามขวางทับแกน X จะเห็นได้ว่าแนวแกน Y มีค่าคงที่เท่ากับ 2

$$\text{ดังนั้นใช้สมการไฮเพอร์โบลารูปมาตรฐาน} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

แทนค่า $(h,k) = (3,2)$, $a=4$ และ $b=3$ จะได้

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \text{เป็นสมการไฮเพอร์โบลารูปมาตรฐาน}$$

$$\text{และ} \quad \frac{9(x-3)^2 - 16(y-2)^2}{144} = 1$$

$$9(x-3)^2 - 16(y-2)^2 = 144$$

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์

$$9(x^2 - 6x + 9) - 16(y^2 - 4y + 4) = 144$$

$$9x^2 - 54x + 81 - 16y^2 + 64y - 64 = 144$$

$$9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$$

1.12 บทสรุป

เรขาคณิตและวิเคราะห์เป็นพื้นฐานของแคลคูลัส และคณิตศาสตร์วิศวกรรมในขั้นสูงต่อไป ทำให้ นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเรื่องระนาบของเส้น จุดที่อยู่บนระนาบ การหาระยะทางและหาจุดแบ่ง ระหว่างจุดสองจุด เส้นตรง การหาความชัน ความเอียงของเส้นตรง สมการเส้นตรง เส้นขนานและเส้น ตั้งฉาก มุมระหว่างเส้นตรง ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน การ ประยุกต์ใช้กับการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และสุดท้ายภาคตัดกรวย ซึ่งเป็นพื้นฐานที่จะต้องใช้ในการ การศึกษาด้านวิศวกรรมศาสตร์

1.13 คำถามท้ายบท

1. จงหาระยะทาง หาคความชัน หาคความเอียง ระหว่างจุด 2 จุด ต่อไปนี้
 - 1.1 $(2, -1)$ กับ $(-4, 3)$
 - 1.2 $(-4, -2)$ กับ $(3, 5)$
 - 1.3 $(2, 1)$ กับ $(5, 7)$
 - 1.4 $(-1, -5)$ กับ $(-4, -6)$
2. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด ต่อไปนี้
 - 2.1 $(1, -1)$ กับ $(-2, 3)$
 - 2.2 $(-1, -3)$ กับ $(4, 2)$
 - 2.3 $(-2, 3)$ กับ $(1, 7)$
 - 2.4 $(-2, -7)$ กับ $(-4, -2)$
3. จงหาจุด $P(x, y)$ ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP:PB = r_1:r_2$
 - 3.1 $A(2, -3)$ และ $B(1, 2)$; $r_1:r_2 = 1:2$
 - 3.2 $A(7, -1)$ และ $B(2, 5)$; $r_1:r_2 = 3:2$
 - 3.3 $A(5, 4)$ และ $B(-1, 10)$; $r_1:r_2 = 1:3$
4. จงหาสมการวงกลมต่อไปนี้
 - 4.1 จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง $(2, 4)$ และรัศมี $r = 5$
 - 4.2 จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ และรัศมี $r = 7$
 - 4.3 จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง $(2, 1)$ และผ่านจุด $(4, 5)$
 - 4.4 จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 + 12x + 10y + 36 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางและผ่านจุด

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



4.5 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(3,1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $12x+2y-6=0$

4.6 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(1,3)$ $(-1,-4)$ และ $(4,1)$

4.7 จงหาสมการวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเชื่อมระหว่างจุด $(-2,6)$ และจุด $(2,-3)$

5. จงหาสมการพาราโบลาต่อไปนี้

5.1 จากสมการพาราโบลา $y^2-2x-2y+5=0$ จงหาจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม สมการไดเรกทริกซ์ สมการแกนของพาราโบลา พร้อมเขียนกราฟประกอบ

5.2 จงหาสมการพาราโบลาเมื่อกำหนดจุดยอด $V(-2,4)$ และจุดโฟกัส $F(-2,0)$

5.3 จงหาสมการพาราโบลาซึ่งมีจุดยอด $V(2,-4)$ แกนของพาราโบลาเป็นเส้นตรง $x=2$ และความยาวลาตัสเรกตัมเท่ากับ 12

5.4 จงหาสมการพาราโบลาซึ่งมีจุดโฟกัส $F(1,-3)$ และจุดปลายของลาตัสเรกตัมอยู่ที่จุด $(-2,-3)$ และ $(4,-3)$

5.5 จงหาสมการพาราโบลาซึ่งมีจุดโฟกัส $F(4,2)$ และสมการไดเรกทริกซ์ $t:x=-4$

6. จงหาสมการวงรีต่อไปนี้

6.1 จากสมการวงรี $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนยาว ความยาวของแกนสั้น ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไดเรกทริกซ์ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

6.2 จากสมการวงรี $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนยาว ความยาวของแกนสั้น ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไดเรกทริกซ์ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

6.3 จากสมการวงรี $9x^2+4y^2-54x+45=0$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนยาว ความยาวของแกนสั้น ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไดเรกทริกซ์ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

6.4 จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดให้ $F(\pm 9,0)$ ความยาวของแกนยาวเท่ากับ 24

6.5 จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดให้ $F(-9,-2)$ และ $F(-1,-2)$ ความยาวของแกนยาวเท่ากับ 10

6.6 จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดให้ จุดศูนย์กลาง $V(4,-1)$ จุดโฟกัส $F(1,-1)$ และผ่านจุด $(8,0)$

7. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

7.1 จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของ

Geometric Analysis เรขาคณิตวิเคราะห์



แกนตามขวาง ความยาวของแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ และสมการไดเรกตริกซ์ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

7.2 จากสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x+4)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนตามขวาง ความยาวของแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ และสมการไดเรกตริกซ์ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

7.3 จากสมการไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 20 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนตามขวาง ความยาวของแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ และสมการไดเรกตริกซ์ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

7.4 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดให้จุดยอด $V(\pm 3, 0)$ และสมการเส้นกำกับ $y = \pm \frac{3}{4}x$

7.5 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดให้จุดโฟกัส $F(\pm 5, 0)$ และสมการเส้นกำกับ $y = \pm \frac{4}{3}x$

7.6 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดให้จุดยอด $V_1(-1, 3)$ $V_2(7, 3)$ และจุดโฟกัส $F_1(-2, 3)$ $F_2(8, 3)$

7.7 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดให้จุดยอด $V_1(-1, -2)$ $V_2(-1, -6)$ และจุดโฟกัส $F_1(-1, 1)$ $F_2(-1, -7)$