



Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Telecommunications Engineering

Faculty of Science and Technology

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

จำนวนเชิงซ้อน

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. จำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ
2. จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉาก
3. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วหรือรูปตรีโกณมิติ
4. การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
5. ทฤษฎีของเดอมัวร์
6. รากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
7. การแก้สมการเชิงซ้อน
8. จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ให้นักศึกษามีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาข้างต้นได้
2. ให้นักศึกษาสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของเนื้อหาในหัวข้อข้างต้นได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

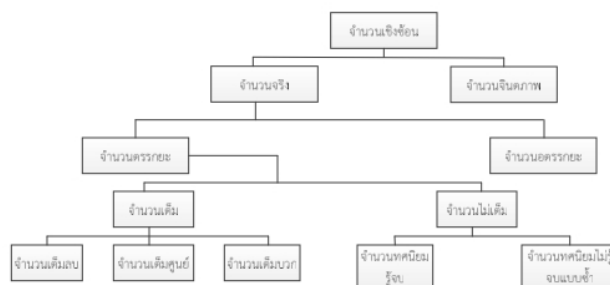
1. วิธีสอนอาจารย์บรรยายเนื้อหา แสดงที่มาของนิยาม แสดงตัวอย่างที่เกี่ยวข้อง
2. มีคำถามในระหว่างสอน เปิดโอกาสให้คำ-ตอบในประเด็นข้อสงสัย
3. มอบหมายงานในระหว่างเรียน มอบงานนอกเวลาเรียน

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



บทที่ 2 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) เป็นจำนวนที่ไม่มีอยู่จริงในธรรมชาติ แต่ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น การแก้สมการ $x^2 + n = 0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนจึงมีประโยชน์มากโดยเฉพาะในทางวิศวกรรมที่จะต้องหาผลเฉลยโดยวิธีที่เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนและฟังก์ชันเชิงซ้อน เช่น แบบจำลองของวงจรไฟฟ้า ระบบกลศาสตร์ของการสั่นสะเทือน ทฤษฎีของความร้อน พลศาสตร์ของของไหล และไฟฟ้าสถิตย์ เป็นต้น สำหรับในบทนี้จะอธิบายถึง จำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉาก จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว หรือรูปตรีโกณมิติ การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ทฤษฎีของเดอมัวร์ รากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน การแก้สมการเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน และคุณสมบัติต่าง ๆ ที่จำเป็นสำหรับการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์



ภาพที่ 2.1 โครงสร้างของระบบจำนวนทั้งหมด

2.1. จำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ

ในระบบจำนวนจริง จะไม่สามารถหา x ที่เป็นจำนวนจริงจากสมการ $x^2 + n = 0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะไม่มีจำนวนจริง n ใดที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากับค่า $-n$ ดังนั้น จึงได้มีการสร้างสัญลักษณ์ใหม่เพื่อให้หาคำตอบในสมการดังกล่าว กล่าวคือ ถ้า $x^2 + n = 0$ แล้ว จะได้ว่า $x = \sqrt{-n}$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



เช่น ถ้า $x^2 + 2 = 0$ จะได้ว่า $x = \sqrt{-2}$ หรือ ถ้า $x^2 + 3 = 0$ จะได้ว่า $x = \sqrt{-3}$ เป็นต้น สัญลักษณ์ $\sqrt{-n}$ จะถูกเรียกว่าเป็น จำนวนจินตภาพ และเรียก $\sqrt{-1}$ ว่า หนึ่งหน่วยจินตภาพ โดยจะนิยมเขียนว่า $i = \sqrt{-1}$ อาทิเช่น $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$, $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$, $\sqrt{-9} = 3i$ เป็นต้น ค่าของ i ยกกำลังด้วยจำนวนเต็มบวกที่สำคัญ มีดังนี้

$$1. i = \sqrt{-1}$$

$$2. i^2 = -1$$

$$3. i^3 = i^2 i = -i$$

$$4. i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$5. i^5 = i^4 i = i$$

$$6. i^6 = i^4 i^2 = i^2 = -1$$

$$7. i^7 = i^4 i^3 = i^3 = i^2 i = -i$$

$$8. i^8 = i^4 i^4 = 1$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = i^2 = -1$$

$$i^{4n+3} = i^3 = -i$$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาค่าของ $i^{57}, i^{83}, i^{100}, i^{1250}$

วิธีทำ

$$\text{เนื่องจาก } i^{57} = i^{4(14)+1} = i$$

$$i^{83} = i^{4(20)+3} = i^3 = -i$$

$$i^{100} = i^{4(25)} = 1$$

$$i^{1250} = i^{4(312)+2} = i^2 = -1$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number

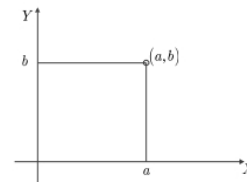


2.2 จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉาก

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) คือ จำนวนเลขที่เขียนอยู่ในรูปแบบ $a+bi$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i=\sqrt{-1}$ ดังนั้น

$$z = a + bi \quad (2.1)$$

a จะถูกเรียกว่า ส่วนจริง (real part) ของ z ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วย $\text{Re}(z)=a$ และ b จะถูกเรียกว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วย $\text{Im}(z)=b$ เช่น $z=2-4i$ จะได้ว่า $\text{Re}(z)=2$ และ $\text{Im}(z)=-4$ นอกจากนี้การเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ สามารถแทนด้วยจุดบนระนาบ xy ของระบบพิกัดฉากได้ด้วยจุด (a,b) ดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 ระนาบพิกัดฉาก

โดยจะเรียกแกน x ว่า แกนจริง (real axis), เรียกแกน y ว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกระนาบ xy ว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plane) ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ อาจเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง คือ (a,b) ก็ได้

2.2.1 การเท่ากัน การบวก และการลบ

กำหนดให้ $z_1=a+bi$ และ $z_2=c+di$ จะได้ว่า

1. การเท่ากัน $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
2. การบวก $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
3. การลบ $z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

เช่น

1. $(2,3) + (4,5) = (2+4, 3+5) = (6,8)$
2. $(-3,4) + (4,-5) = (-3+4, 4-5) = (1,-1)$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.2.2 เอกลักษณ์และอินเวอร์สการบวก

กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เขียนแทนด้วย (a, b) จะได้ว่า จำนวนเชิงซ้อน $(0, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวก เนื่องจาก

$$(0, 0) + (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

ส่วนอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a, b) คือ $(-a, -b)$ เนื่องจาก

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

เช่น อินเวอร์สการบวกของ $(3, 2)$ คือ $(-3, -2)$ และอินเวอร์สการบวกของ $2 - 3i$ คือ $2 + 3i$

2.2.3 การคูณ

กำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้ว่า

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \quad (2.2)$$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาผลคูณ $3 + 4i$ กับ $2 + i$

วิธีทำ

$$\text{เนื่องจาก } (3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i + 4i^2$$

$$= 6 + 11i - 4$$

$$= 2 + 11i$$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $z_1 = (2, -5)$ และ $z_2 = (-1, 3)$ จงหาค่าของ $z_1 z_2 - 3z_1$

วิธีทำ

$$\text{หา } z_1 z_2 \text{ จาก } z_1 z_2 = (2 - 5i)(-1 + 3i)$$

$$= -2 + 6i + 5i - 15i^2$$

$$= 13 + 11i$$

$$\text{หา } 3z_1 \text{ จาก } 3z_1 = 3(2 - 5i)$$

$$= 6 - 15i$$

$$\text{ดังนั้น } z_1 z_2 - 3z_1 = (13 + 11i) - (6 - 15i)$$

$$= 13 + 11i - 6 + 15i$$

$$= 7 + 26i$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.2.4 เวกเตอร์และอินเวอร์สการคูณ

ในระบบจำนวนเชิงซ้อน $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณ เนื่องจาก

$$(a,b)(1,0) = (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a,b)$$

สำหรับอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a,b) หาได้ดังนี้ ถ้าให้จำนวนเชิงซ้อน (x,y) เป็นอินเวอร์สการคูณของ (a,b) โดยที่ $(a,b) \neq (0,0)$ จะได้ว่า

$$(a,b)(x,y) = (1,0)$$

$$(ax - by, ay - bx) = (1,0)$$

นั่นคือ $ax - by = 1$ และ $ay - bx = 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ และ } y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

ดังนั้น อินเวอร์สการคูณของ (a,b) คือ $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ เช่น

1. อินเวอร์สการคูณของ $(2,3)$ คือ $\left(\frac{2}{(2)^2 + (3)^2}, -\frac{3}{(2)^2 + (3)^2}\right) = \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

2. อินเวอร์สการคูณของ $(-3,4)$ คือ $\left(\frac{-3}{(-3)^2 + (4)^2}, -\frac{4}{(-3)^2 + (4)^2}\right) = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$

3. อินเวอร์สการคูณของ $3 - 2i$ คือ $\left(\frac{3}{9 + 4}, -\frac{-2}{9 + 4}\right) = \left(\frac{3}{13}, \frac{2}{13}\right)$

2.2.5 การหารจำนวนเชิงซ้อน

ในการหาของผลหารของจำนวนเชิงซ้อน จะใช้นิยามการคูณจำนวนเชิงซ้อนมาช่วย
เนื่องจากการหารจำนวนเชิงซ้อน ก็คือ การคูณด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหาร นั่นคือ

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2} \right)$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \quad (2.3)$$

เช่น

1) $\frac{(3,4)}{(2,3)} = (3,4) \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13} \right) = \left(\frac{18}{13}, -\frac{1}{13} \right)$

2) $\frac{3+4i}{1+2i} = (3+4i) \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \right) = \left(\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i \right)$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.2.6 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ คือ จำนวนเชิงซ้อน $\bar{z} = a - bi$ เช่น การสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $2 + 3i$ คือ $2 - 3i$ และการสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $-2 - 3i$ คือ $-2 + 3i$ เป็นต้น สังเกตจะพบว่า การหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนทำได้ง่าย โดยการเปลี่ยนเครื่องหมาย (จากบวกเป็นลบ หรือจากลบเป็นบวก) ของจำนวนจินตภาพเท่านั้น

คุณสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

1. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\bar{\bar{z}} = z$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง
2. ถ้า z เป็นจำนวนจินตภาพแท้ แล้ว $\bar{z} = -z$
3. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\bar{\bar{z}} = z$
4. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

$$4.1. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$4.2. \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$4.3. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

ในการหารจำนวนเชิงซ้อนนั้น สามารถใช้คุณสมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนมาช่วยในการหารจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยการนำสังยุคของตัวหารมากคูณทั้งตัวตั้งและตัวหาร เช่น

$$\begin{aligned} 1. \frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{1+1} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{3+4i}{1+2i} &= \frac{3+4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} \\ &= \frac{3-2i-8i^2}{1+4} \\ &= \frac{11-2i}{5} \\ &= \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number

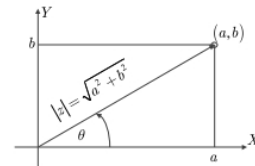


2.2.7 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ หาได้จาก

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.4)$$

ตามที่แสดงในภาพที่ 2.3 จะเห็นได้ว่า ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ ก็คือ ระยะทางจากจุด $(0, 0)$ ไปยังจุด (a, b) นั่นเอง



ภาพที่ 2.3 แสดงการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

เช่น

1. ค่าสัมบูรณ์ของ $3 + 4i$ คือ $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

2. ค่าสัมบูรณ์ของ $1 + \sqrt{3}i$ คือ $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

3. ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ คือ $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

4. ค่าสัมบูรณ์ของ $3i$ คือ $|3i| = 3$

5. ค่าสัมบูรณ์ของ 4 คือ $|4| = 4$

คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z| = |z| = |-z|$

2. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

3. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

4. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z_2 \neq 0$ แล้ว $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

5. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.3 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วหรือรูปตรีโกณมิติ

จากกราฟของจำนวนเชิงซ้อนในภาพที่ 2.3 สามารถเขียนจุด (a,b) แทนจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ ได้ ในระนาบเชิงซ้อน และเขียนเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อนดังกล่าว โดยมีจุด $(0,0)$ เป็นจุดตั้งต้น และจุด (a,b) เป็นจุดสุดท้าย โดยที่มุม θ เป็นมุม (หน่วยเป็นเรเดียน) ที่เวกเตอร์ที่เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ ทำกับแกน x จากภาพที่ 2.3 จะได้ว่า

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} \quad \text{เมื่อ } a \neq 0 \quad (2.5)$$

ดังนั้น

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{เมื่อ } a \neq 0 \quad (2.6)$$

เมื่อ $|z|=r$

$$a = |z|\cos(\theta) \quad \text{หรือ} \quad a = r\cos(\theta) \quad (2.7)$$

$$b = |z|\sin(\theta) \quad \text{หรือ} \quad b = r\sin(\theta) \quad (2.8)$$

โดยที่ $|z|$ คือ ค่าสัมบูรณ์ของ z ดังนั้น สามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = a+bi$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ได้คือ

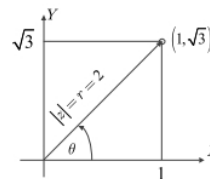
$$z = a+bi = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (2.9)$$

หรือ

$$z = a+bi = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\angle\theta \quad (2.10)$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 1+i\sqrt{3}$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ



เนื่องจาก (a,b) อยู่จุดภาคที่ 1 จะได้ว่า

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{นั่นคือ } \theta = \frac{\pi}{3}$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



เนื่องจาก $|z| = r = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$

จะได้ $a = r \cos(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ และ $b = r \sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น $z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\}$

หรือ $z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ) \right\} = 2 \angle 60^\circ$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = 1 - \sqrt{3}i$ ในระบบพิกัดเชิงซ้อน
วิธีทำ

เนื่องจาก (a, b) อยู่จุดภาคที่ 4 จะได้ว่า

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} = -\sqrt{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

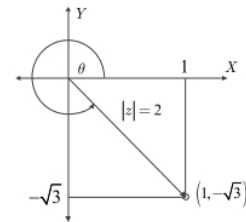
นั่นคือ $\theta = \frac{5\pi}{3}$

เนื่องจาก $|z| = r = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$

จะได้ $a = r \cos(\theta) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ และ $b = r \sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

ดังนั้น $z = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right\}$

หรือ $z = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos(300^\circ) + i \sin(300^\circ) \right\} = 2 \angle 300^\circ$



2.3.1 ค่าของ $\cos(\theta)$ และ $\sin(\theta)$ ในรูปเชิงซ้อน

พื้นฐานด้านตรีโกณมิติช่วยให้สามารถแก้ปัญหาด้านจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงซ้อนได้ โดยมีกฎเกณฑ์ ดังต่อไปนี้

1. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
2. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $(-\theta)$ กับมุม $(360^\circ - \theta)$ เมื่อ $0 < \theta < 360^\circ$

$$\sin(-\theta) = -\sin(360^\circ - \theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(360^\circ - \theta)$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



4. พิจารณาฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $(n360^\circ + \theta)$ กับมุม (θ) เมื่อ $0 < \theta < 360^\circ$

$$\sin(n360^\circ + \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(n360^\circ + \theta) = \cos(\theta)$$

5. พิจารณาฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $(180^\circ - \theta)$, $(180^\circ + \theta)$ และ $(360^\circ - \theta)$ กับมุม (θ) เมื่อ

$$0 < \theta < 90^\circ$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos(\theta)$$

2.3.2 การเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วหรือตรีโกณมิติเป็นรูปพิกัดฉาก

การเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วหรือตรีโกณมิติเป็นรูปพิกัดฉากสามารถทำได้โดยการแทนค่าตรีโกณมิติ $\sin(\theta)$ และ $\cos(\theta)$ ในรูปแบบเชิงขั้วหรือตรีโกณมิติแล้วคำนวณค่ามุม $\sin(\theta)$ และ $\cos(\theta)$ ออกมาเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากได้

ตัวอย่างที่ 2.6 จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของพิกัดฉาก

$$1. z = 6[\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)]$$

$$2. z = \sqrt{2}[\cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ)]$$

วิธีทำ

$$1. z = 6[\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)]$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3i$$

$$2. z = \sqrt{2}[\cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ)]$$

$$= \sqrt{2}[0 + i(1)] = \sqrt{2}i$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



ตัวอย่างที่ 2.7 จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของพิกัดฉาก

1. $4\angle 150^\circ$

2. $2\angle 240^\circ$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1. \quad z &= 4\angle 150^\circ = 4(\cos(150^\circ) + i\sin(150^\circ)) \\ &= 4(\cos(180^\circ - 30^\circ) + i\sin(180^\circ - 30^\circ)) \\ &= 4(-\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad z &= 2\angle 240^\circ = 2(\cos(240^\circ) + i\sin(240^\circ)) \\ &= 2(\cos(180^\circ + 60^\circ) + i\sin(180^\circ + 60^\circ)) \\ &= 2(-\cos(60^\circ) - i\sin(60^\circ)) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

2.4 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

2.4.1 การคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$\text{กำหนดให้ } z_1 = |z_1| \{\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\} \text{ และ } z_2 = |z_2| \{\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\}$$

$$\text{จะได้ } z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } 2\{\cos(20^\circ) + i\sin(20^\circ)\} \times 3\{\cos(25^\circ) + i\sin(25^\circ)\} \\ &= (2)(3)\{\cos(20^\circ + 25^\circ) + i\sin(20^\circ + 25^\circ)\} \\ &= 6\{\cos(45^\circ) + i\sin(45^\circ)\} \\ &= 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \end{aligned}$$

2.4.2 การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$\text{กำหนดให้ } z_1 = |z_1| \{\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\} \text{ และ } z_2 = |z_2| \{\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\}$$

$$\text{จะได้ } \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } \frac{4\{\cos(315^\circ) + i\sin(315^\circ)\}}{2\{\cos(45^\circ) + i\sin(45^\circ)\}} &= \frac{4}{2} \{\cos(315^\circ - 45^\circ) + i\sin(315^\circ - 45^\circ)\} \\ &= 2\{\cos(270^\circ) + i\sin(270^\circ)\} = -2i \end{aligned}$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.5 ทฤษฎีของเดอมัวร์

ถ้า $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ จาก $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$z^2 = z \cdot z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \cdot r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$= r^2(\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta))$$

$$= r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

$$\text{ดังนั้น } z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \quad (2.13)$$

ตัวอย่างที่ 2.8 กำหนดให้ $z = \sqrt{2}(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)$ จงหา z^{10} และให้คำตอบในรูปพิกัดฉาก

วิธีทำ

$$\text{จาก } z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

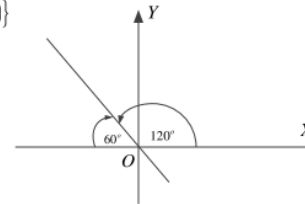
$$\therefore z^{10} = (\sqrt{2})^{10} \{\cos 10(12^\circ) + i\sin 10(12^\circ)\}$$

$$= 32(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$

$$= 32(-\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

$$= 32\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -16 + 16\sqrt{3}i$$



ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาค่าของ $(-1 + \sqrt{3}i)^8$

วิธีทำ

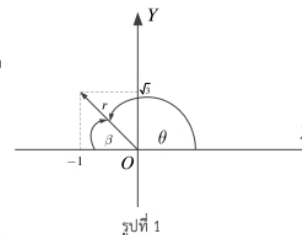
โจทย์ในลักษณะนี้ควรเปลี่ยนเป็นรูปเชิงขั้วก่อน คือ

$$z = -1 + \sqrt{3}i = (-1, \sqrt{3})$$

$$\therefore a = -1 \text{ และ } b = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \text{ หน่วย}$$



รูปที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



จากรูปที่ 1 $\beta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| = \arctan \sqrt{3}$

$\therefore \beta = 60^\circ$

จะได้ $\theta = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\therefore z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

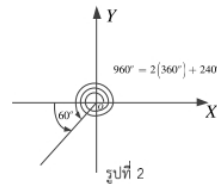
ดังนั้น $(-1 + \sqrt{3}i)^8 = [2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)]^8$

$$= 2^8 \{ \cos 8(120^\circ) + i \sin 8(120^\circ) \}$$

$$= 256(\cos 960^\circ + i \sin 960^\circ)$$

$$= 256(-\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$$

$$= 256\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128 - 128\sqrt{3}i$$



ตัวอย่างที่ 2.10 กำหนดให้ $z = \sqrt{2}(\cos 57^\circ + i \sin 57^\circ)$ จงหา z^{20} และให้คำตอบในรูปพิกัดฉาก

วิธีทำ

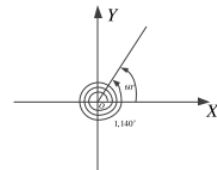
จาก $z = \sqrt{2}(\cos 57^\circ + i \sin 57^\circ)$

$\therefore z^{20} = \{\sqrt{2}(\cos 57^\circ + i \sin 57^\circ)\}^{20} = (\sqrt{2})^{20} \{\cos 20(57^\circ) + i \sin 20(57^\circ)\}$

$= 1024(\cos 1140^\circ + i \sin 1140^\circ)$

$$= 1024(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$= 1024\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 + 512\sqrt{3}i$$



2.6 รากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ และ $z \neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ รากอันดับที่ n ของ z คือ

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{n} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right) \quad (2.14)$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



ตัวอย่างที่ 2.11 จงหารากอันดับที่ 3 ของ $-8i$

วิธีทำ

$$-8i = 0 - 8i = (0, -8)$$

$$a = 0 \text{ และ } b = -8$$

จากรูปเห็นชัดเจนแล้วว่า $\theta = 270^\circ$ และ $r = 8$

$$\therefore -8i = 8(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$\text{จาก } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{n} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right)$$

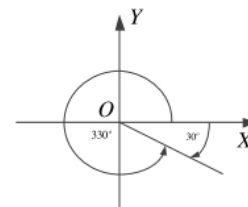
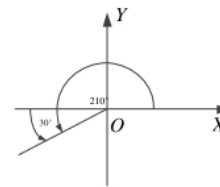
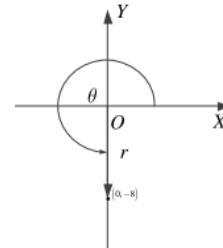
$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[3]{-8i} &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{270^\circ + 360^\circ k}{3} + i \sin \frac{270^\circ + 360^\circ k}{3} \right) \\ &= 2 \left\{ \cos(90^\circ + 120^\circ k) + i \sin(90^\circ + 120^\circ k) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } k = 0; \sqrt[3]{-8i} &= 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) \\ &= 2(0 + i) = 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } k = 1; \sqrt[3]{-8i} &= 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \\ &= 2(-\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \\ &= -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } k = 2; \sqrt[3]{-8i} &= 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \\ &= 2(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

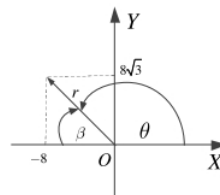
ดังนั้น รากอันดับที่ 3 ของ $-8i$ คือ $2i, -\sqrt{3} - i$ และ $\sqrt{3} - i$



จำนวนเชิงซ้อน Complex Number

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหารากอันดับที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$

วิธีทำ



$$-8 + 8\sqrt{3}i = (-8, 8\sqrt{3})$$

$$a = -8 \text{ และ } b = 8\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16 \quad \text{หน่วย}$$

$$\beta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| = \arctan \sqrt{3}$$

$$\therefore \beta = 60^\circ$$

$$\text{จะได้ } \theta = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{จาก } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{n} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right)$$

$$\therefore \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{120^\circ + 360^\circ k}{4} + i \sin \frac{120^\circ + 360^\circ k}{4} \right)$$

$$= 2 \left\{ \cos(30^\circ + 90^\circ k) + i \sin(30^\circ + 90^\circ k) \right\}$$

$$\text{เมื่อ } k = 0; \quad \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = 2 \left(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ \right)$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$\text{เมื่อ } k = 1; \quad \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = 2 \left(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ \right)$$

$$= 2 \left(-\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ \right)$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{เมื่อ } k = 2; \quad \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = 2 \left(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ \right)$$

$$= 2 \left(-\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ \right)$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i$$

$$\text{เมื่อ } k = 3; \quad \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = 2 \left(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ \right)$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



$$= 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

ดังนั้น รากอันดับที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$ คือ $\sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i$ และ $1 - \sqrt{3}i$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหารากอันดับที่ 6 ของ 1

วิธีทำ

$$1 = 1 + 0i = (1, 0)$$

$$\therefore a = 1 \text{ และ } b = 0$$

$$\text{จากรูป คือ } r = 1 \text{ และ } \theta = 0^\circ$$

$$\therefore 1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$$

$$\text{จาก } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{n} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right)$$

$$\therefore \sqrt[6]{1} = \cos \frac{0^\circ + 360^\circ k}{6} + i \sin \frac{0^\circ + 360^\circ k}{6} = \cos 60^\circ k + i \sin 60^\circ k$$

$$\text{เมื่อ } k = 0; \quad \sqrt[6]{1} = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1 + 0 = 1$$

$$\text{เมื่อ } k = 1; \quad \sqrt[6]{1} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } k = 2; \quad \sqrt[6]{1} &= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ \\ &= -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } k = 3; \quad \sqrt[6]{1} = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ$$

$$= 1 + 0 = -1$$

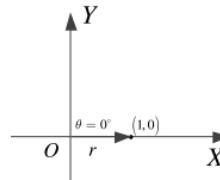
$$\text{เมื่อ } k = 4; \quad \sqrt[6]{1} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$$

$$= -\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{เมื่อ } k = 5; \quad \sqrt[6]{1} = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ$$

$$= \cos 60^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ดังนั้น รากอันดับที่ 6 ของ 1 คือ $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ และ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.7 การแก้สมการเชิงซ้อน

สมการเชิงซ้อน คือ สมการที่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง จำนวนจินตภาพ หรือจำนวนเชิงซ้อน การแก้สมการเชิงซ้อนนั้น จะมีวิธีการแก้สมการเหมือนกับสมการของจำนวนจริง แต่บางกรณีจะต้องใช้ความรู้ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน การหารากของสมการให้ครบทุกคำตอบ (โดยสมการนี้มีกำลังสูงสุดเท่าไร จะมีรากคำตอบของสมการจำนวนเท่านั้น) หรือจะใช้วิธีหารากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.14 จงแก้สมการ $z^4 + 2z^2 - 3 = 0$

วิธีทำ

$$z^4 + 2z^2 - 3 = 0$$

$$(z^2 + 3)(z^2 - 1) = 0$$

$$z^2 + 3 = 0$$

$$z^2 - 1 = 0$$

$$z^2 = -3$$

$$z^2 = 1$$

$$z = \pm\sqrt{-3}$$

$$z = \pm 1$$

$$= \pm\sqrt{3}i$$

ค่า z คือ $\pm\sqrt{3}i$ และ ± 1

ตัวอย่างที่ 2.15 จงแก้สมการ $z^3 = 8$

วิธีทำ

$$z^3 = 8 \text{ หรือ } z = \sqrt[3]{8}$$

เปลี่ยน 8 ให้อยู่ในรูปเชิงซ้อน

$$8 = 8 + 0i = (8, 0)$$

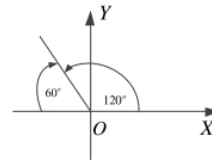
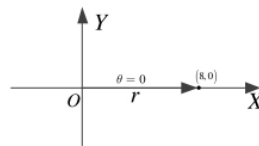
$$\therefore a = 8 \text{ และ } b = 0$$

จากรูป คือ $r = 8$ และ $\theta = 0^\circ$

$$\therefore 8 = 8(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\text{จาก } \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{n} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right)$$

$$\therefore \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{3} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{3} \right) = 2(\cos 120^\circ k + i \sin 120^\circ k)$$



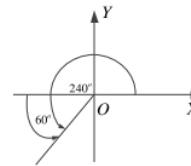
จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



$$\text{เมื่อ } k=0; \quad \sqrt[3]{8} = 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 2(1 + i \cdot 0) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } k=1; \quad \sqrt[3]{8} &= 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\ &= 2(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } k=2; \quad \sqrt[3]{8} &= 2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \\ &= 2(-\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$



ดังนั้น $z = \sqrt[3]{8}$ คือ $2, -1 + \sqrt{3}i$ และ $-1 - \sqrt{3}i$

2.8 จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง

กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ โดยที่ a และ b เป็นเลขจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ ฟังก์ชันพื้นฐานต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อนสามารถหาได้ ดังต่อไปนี้ สำหรับการหาค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) ของเลขจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ หรือเขียนให้อยู่ในรูปเชิงขั้วหรือในรูปของตรีโกณมิติ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ พิจารณาจากสูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) $(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta}$ ดังนั้นจะได้จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันชี้กำลังที่แทนด้วยสูตรของออยเลอร์ ได้

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (2.15)$$

ค่า $z = a + bi$ ในรูปชี้กำลังมีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) ค่า e มีค่าเท่าประมาณ $e \approx 2.71828$ และค่า r และ θ ที่อยู่ในรูปเชิงขั้วและรูปชี้กำลังเป็นค่าเดียวกัน สามารถทำการเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้ จากพิกัดฉากเป็นรูปชี้กำลัง หรือเป็นรูปเชิงขั้ว (รูปตรีโกณมิติ) ก็สามารทำได้

ตัวอย่างที่ 2.16 จงเปลี่ยนค่า $z = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ เป็นรูปชี้กำลัง

วิธีทำ

$$\text{จาก } z = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \text{ จะได้ } r = 4 \text{ และ } \theta = 30^\circ$$

$$\text{เปลี่ยนมุม } \theta \text{ เป็นเรเดียน } \theta = 30^\circ = 30\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้รูปชี้กำลังเป็น } z = re^{i\theta} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



ตัวอย่างที่ 2.17 จงเปลี่ยนค่า $z = 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$ เป็นรูปชี้กำลัง

วิธีทำ

$$\text{จาก } z = 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ) \text{ จะได้ } z = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$r = 2 \text{ และ } \theta = 300^\circ$$

$$\text{เปลี่ยนมุม } \theta \text{ เป็นเรเดียน } \theta = 300^\circ = 300\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้รูปชี้กำลังเป็น } z = re^{i\theta} = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงเปลี่ยนค่า $z = 2 - \sqrt{5}i$ เป็นรูปชี้กำลัง

วิธีทำ

$$\text{จาก } z = 2 - \sqrt{5}i = (2, -\sqrt{5}) \text{ จะได้ } a = 2 \text{ และ } b = -\sqrt{5}$$

$$\text{จาก } z = a + ib \text{ และ } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{2^2 + 5} = \sqrt{9} = 3 \text{ หน่วย}$$

$$\text{หา } \theta \text{ จะได้ } \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ เรเดียน}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) = 0.841 \text{ เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้รูปชี้กำลังเป็น } z = re^{i\theta} = 3e^{(0.841)i}$$

ตัวอย่างที่ 2.19 จงเปลี่ยนค่า $z = 4e^{\frac{3\pi}{2}i}$ เป็นรูปพิกัดเชิงขั้ว และพิกัดฉาก

วิธีทำ

$$\text{จาก } z = 4e^{\frac{3\pi}{2}i} \text{ อยู่ในรูป } z = re^{i\theta} \text{ จะได้ } r = 4 \text{ และ } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$\text{เปลี่ยน } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน เป็นองศา จะได้ } \theta = \frac{3(180^\circ)}{2} = 270^\circ$$

$$\text{ดังนั้น เขียนเป็นรูปเชิงขั้ว จะได้ } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = 4(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) \text{ หรือ } z = 4\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$$

เปลี่ยนรูปเชิงขั้ว เป็นรูปพิกัดฉาก จะได้

$$z = 4(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = 4(0 - i) = -4i$$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



การบวก ลบ คูณ และหาร จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง มีกฎเกณฑ์การดำเนินการ ดังนี้

การบวก $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 + r_2) e^{i\theta}$

การลบ $r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 - r_2) e^{i\theta}$

การคูณ $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

การหาร $r_1 e^{i\theta_1} : r_2 e^{i\theta_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

ตัวอย่างที่ 2.20 กำหนดให้ $z_1 = 3e^{\frac{3\pi}{2}i}$, $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_3 = 4e^{\frac{3\pi}{2}i}$, $z_4 = 6e^{\frac{\pi}{2}i}$

จงหาค่า $\frac{z_1 + z_3}{z_2 - z_4}$

วิธีทำ

หา $z_1 + z_3 = \left(3e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) + \left(4e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) = (3+4)e^{\frac{3\pi}{2}i} = 7e^{\frac{3\pi}{2}i}$

หา $z_2 - z_4 = \left(2e^{\frac{\pi}{2}i} - 6e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = (2-6)e^{\frac{\pi}{2}i} = -4e^{\frac{\pi}{2}i}$

ดังนั้น $\frac{z_1 + z_3}{z_2 - z_4} = \frac{7e^{\frac{3\pi}{2}i}}{-4e^{\frac{\pi}{2}i}} = \left(\frac{-7}{4}\right) e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)i} = \frac{-7}{4} e^{\left(\frac{2\pi}{2}\right)i}$

ตัวอย่างที่ 2.21 กำหนดให้ $z_1 = \sqrt{3}e^{2+3i}$, $z_2 = 2e^{2i}$, $z_3 = 4e^{2i-1}$

จงหาค่า $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

วิธีทำ

หา $z_1 \cdot z_3 = (\sqrt{3}e^{2+3i})(4e^{2i-1})$
 $= (\sqrt{3})(4)(e^{(2+3i)+(2i-1)})$
 $= (\sqrt{3})(4)(e^{(2-1+2i+3i)})$
 $= (\sqrt{3})(4)(e^{(1+5i)}) = (\sqrt{3})(4e)(e^{(5i)})$

ดังนั้น $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = \frac{(\sqrt{3})(4e)(e^{(5i)})}{2e^{2i}} = (\sqrt{3})(2e)(e^{(5i-2i)})$
 $= (\sqrt{3})(2e)e^{3i} = 2\sqrt{3}e^{1+3i}$

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาค่า z จากสมการ $\cos(z) - 5 = 0$

วิธีทำ

$$\text{จาก } \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ แทนในสมการจะได้}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - 5 = 0$$

คูณสมการด้วย $2e^{iz}$ จะได้

$$e^{2iz} + 1 - 10e^{iz} = 0$$

$$(e^{iz})^2 - 10e^{iz} + 1 = 0$$

$$\text{ผลเฉลยของสมการ คือ } e^{iz} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}$$

$$\text{ดังนั้น } zi = \ln(5 + \sqrt{24}) \quad \text{หรือ} \quad \ln(5 - \sqrt{24})$$

$$z = \frac{1}{i} \ln(5 + \sqrt{24}) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{i} \ln(5 - \sqrt{24})$$

$$z = -i \ln(5 + \sqrt{24}) \quad \text{หรือ} \quad -i \ln(5 - \sqrt{24})$$

ตัวอย่างที่ 2.23 จงหาค่า $\sinh(i)$

วิธีทำ

$$\text{จากนิยามจะได้ } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sinh(i) &= \frac{e^i - e^{-i}}{2} = \frac{(\cos(1) + i \sin(1)) - (\cos(1) - i \sin(1))}{2} \\ &= i \sin(1) = 0.0175i \end{aligned}$$

2.9 บทสรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อนและคุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ทำให้ผู้เรียนสามารถที่จะเข้าใจเรื่องต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงซ้อนเช่น การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน การหาผลเฉลยของสมการในรูปของจำนวนเชิงซ้อน และอื่น ๆ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนในบทต่อไป รวมทั้งสามารถนำไปใช้ในการศึกษาขั้นสูงขึ้น ซึ่งในการศึกษาขั้นสูงทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ต้องอธิบายพฤติกรรมทางวิศวกรรมไฟฟ้า วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ วิศวกรรมโยธา และทางกลศาสตร์เป็นระบบที่คิดเชิงขั้วจึงจะสามารถเข้าใจได้

จำนวนเชิงซ้อน Complex Number



2.10 คำถามท้ายบท

1. กำหนดให้ $x = 2 + 3i$ และ $y = -2 + i$ จงหาค่าของ

1.1. $x + y$ 1.2. $x - y$ 1.3. xy 1.4. x/y

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงหาค่าของ a และ b จาก

$$(a + bi) + (2 + 3i) = 3 + 4i$$

3. กำหนดให้ $f(z) = (2xy + 2x - 1) - (x^2 - y^2 - 2y)i$ จงเขียน $f(z)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน $z = x + iy$

4. กำหนดให้ $f(z) = 4z^2 + 3z$ จงหาค่าของ $f(2 + 3i)$

5. กำหนดให้ $w = f(z) = \sqrt[3]{z}$ จงหาค่า w เมื่อ $z = 1 + i$

6. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน 1. $\sin \pi$ 2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}i\right)$

7. กำหนดให้ $z = 1 + \sqrt{3}i$ จงหา z^{-10} ในรูปของ $a + bi$

8. กำหนดให้ $z = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ จงหา z^4 ในรูปของ $a + bi$

9. จงหารากที่ 4 ของ $-8 + 8\sqrt{3}i$

10. จงหารากที่ 3 ของ -1

11. จงหารากที่ 2 ของ $7 - 24i$

12. จงแก้สมการกำลังสองเชิงซ้อน $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$

13. จงแสดงคำตอบต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a + bi$ 1. $(\sqrt{-12})^3$ 2. $(1 + \sqrt{-15})^2$

14. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ 1. $\frac{1+i}{1-i}$ 2. $(1+i)^2(1+2i)$

15. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

1. $z = 12\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ 2. $z = 2[\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ]$

16. จงหาค่าต่อไปนี้ 1. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{40}$ 2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$