



Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Telecommunications Engineering

Faculty of Science and Technology

Nakhon Pathom Rajabhat University

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

Function Limit and Continuous



หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ฟังก์ชัน
2. การหาค่าฟังก์ชัน
3. พหุคูณของฟังก์ชัน
4. ฟังก์ชันประกอบ
5. ลิมิต
6. ลิมิตกับปัญหานั้น
7. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

Function Limit and Continuous



ในบทนี้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระและตัวแปรตามมีลักษณะเป็นฟังก์ชัน ศาสตร์ด้านวิศวกรรมจำลองระบบด้วยตัวแปร แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนใหญ่ กำหนดตัวแปรในระบบ ฟังก์ชันคือคำจำกัดความของความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ความต่อเนื่องของฟังก์ชันทำให้นักศึกษารู้ว่าฟังก์ชันมีค่าต่อเนื่องตลอดช่วงใด ๆ ที่สนใจ ลิมิตของฟังก์ชันทำให้นักศึกษาเข้าใจค่าของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรอิสระมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ใด ๆ ลิมิตของฟังก์ชันยังเป็นพื้นฐานของการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันในบทต่อไป

3.1 ฟังก์ชัน

3.1.1 นิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม โดยที่เมื่อแทนค่าตัวแปรอิสระ 1 ค่า ได้ผลลัพธ์ของตัวแปรตามเพียง 1 ค่าเท่านั้น ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x สัญลักษณ์ของฟังก์ชันกำหนดได้ดังนี้

$$y = f(x)$$

โดยที่ x เรียกว่า ตัวแปรอิสระ (Independent variable)

y เรียกว่า ตัวแปรตาม (dependent variable)

หมายเหตุ สามารถใช้อักษรตัวอื่น ๆ แทน f ได้ เช่น g, h, F, G, H ซึ่งแสดงถึงฟังก์ชันหลายฟังก์ชันที่แตกต่างกันไป เช่น

$$\left. \begin{array}{l} 1. y = x^3 - 2 \\ f(x) = x^3 - 2 \end{array} \right\} y = f(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2. y = x^2 + 7 \\ g(x) = x^2 + 7 \end{array} \right\} y = g(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3. y = \sqrt{x^2 + 1} \\ h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \end{array} \right\} y = h(x)$$

Function Limit and Continuous



3.2 การหาค่าฟังก์ชัน

ค่าของฟังก์ชันใด ๆ คือ การหาฟังก์ชัน f ที่ x หรือหาค่า $f(x)$ เมื่อกำหนดค่า x มาให้ หรือเมื่อค่า x เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $f(x) = 2 - x^2 - 2x$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(-3)$
2. $f(2)$
3. $f(a)$
4. $f(2+b)$

วิธีทำ

1. หาค่า $f(-3)$ คือการหาค่าฟังก์ชัน f ที่ $x = -3$

$$\text{จาก } f(x) = 2 - x^2 - 2x$$

$$\therefore f(-3) = 2 - (-3)^2 - 2(-3) = 2 - 9 + 6 = -1$$

2. หาค่า $f(2)$ คือการหาค่าฟังก์ชัน f ที่ $x = 2$

$$\text{จาก } f(x) = 2 - x^2 - 2x$$

$$\therefore f(2) = 2 - 2^2 - 2(2) = 2 - 4 - 4 = -6$$

3. หาค่า $f(a)$ คือการหาค่าฟังก์ชัน f ที่ $x = a$

$$\text{จาก } f(x) = 2 - x^2 - 2x$$

$$\therefore f(a) = 2 - a^2 - 2a$$

4. หาค่า $f(2+b)$ คือการหาค่าฟังก์ชัน f ที่ $x = (2+b)$

$$\text{จาก } f(x) = 2 - x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(2+b) &= 2 - (2+b)^2 - 2(2+b) \\ &= 2 - (4 + 4b + b^2) - 4 - 2b \\ &= 2 - 4 - 4b - b^2 - 4 - 2b \\ &= -6 - 6b - b^2 = -(6 + 6b + b^2)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ จงหาค่าฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x^2)$
2. $f\left(\frac{x}{2}\right)$
3. $f(y+z)$
4. $f\left(\frac{1}{x}\right)$

วิธีทำ

Function Limit and Continuous



1. จาก $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\therefore f(x^2) = (x^2)^2 - 2(x^2) + 3 = x^4 - 2x^2 + 3$$

2. จาก $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\therefore f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = \frac{x^2}{4} - x + 3$$

3. จาก $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\begin{aligned}\therefore f(y+z) &= (y+z)^2 - 2(y+z) + 3 \\ &= y^2 + 2yz + z^2 - 2y - 2z + 3 \\ &= y^2 + z^2 + 2yz - 2y - 2z + 3\end{aligned}$$

4. จาก $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 3$$

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ $g(x) = \begin{cases} x^2; & x < 0 \\ 2x-1; & 0 \leq x < 10 \\ \frac{2}{x}; & x \geq 10 \end{cases}$

จงหาค่าของ 1. $g(-5)$ 2. $g(7)$ 3. $g(12)$

วิธีทำ

1. $x = -5$ ต้องใช้ฟังก์ชัน $g(x) = x^2$; $x < 0$

$$\therefore g(-5) = (-5)^2 = 25$$

2. $x = 7$ ต้องใช้ฟังก์ชัน $g(x) = 2x - 1$; $0 \leq x < 10$

$$\therefore g(7) = 2(7) - 1 = 13$$

3. $x = 12$ ต้องใช้ฟังก์ชัน $g(x) = \frac{2}{x}$; $x \geq 10$

$$\therefore g(12) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดให้ $f(x) = \cos^2 x + \log_2 \frac{2x}{\pi}$ และ $g(x) = \begin{cases} \sin x; & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \tan x; & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\text{จงหาค่า } \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(\pi) + g(\pi)}$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x) = \cos^2 x + \log_2 \frac{2x}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos^2 \frac{\pi}{2} + \log_2 \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (0)^2 + \log_2 1 = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } f(\pi) &= \cos^2 \pi + \log_2 \left(\frac{2}{\pi}\right)(\pi) \\ &= (-1)^2 + \log_2 2 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{จาก } g(x) = \begin{cases} \sin x; & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \tan x; & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{และ } g(\pi) = \tan \pi = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f(\pi) + g(\pi)} = \frac{0 - 1}{2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนดให้ $f(x+1) = x^2 - 3x + 8$ จงหา $f(x+2)$ และ $f(x^3)$

วิธีทำ

$$\text{จาก } f(x+1) = x^2 - 3x + 8 \text{ ให้ } y = x+1$$

$$\therefore x = y - 1$$

$$\text{จาก } f(x+1) = x^2 - 3x + 8$$

$$\begin{aligned} \therefore f(y) &= (y-1)^2 - 3(y-1) + 8 \\ &= y^2 - 2y + 1 - 3y + 3 + 8 \end{aligned}$$

Function Limit and Continuous



จะได้ $f(y) = y^2 - 5y + 12$

จาก $f(y) = y^2 - 5y + 12$

หาค่า $f(x+2) = (x+2)^2 - 5(x+2) + 12$

$$= x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 + 12 = x^2 - x + 6$$

จาก $f(y) = y^2 - 5y + 12$

หาค่า $f(x^3) = (x^3)^2 - 5x^3 + 12 = x^6 - 5x^3 + 12$

3.3 พหุคูณของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ พหุคูณของฟังก์ชันกำหนดดังนี้

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; g(x) \neq 0$

5. $c(f+g)(x) = cf(x) + cg(x)$

$c(f-g)(x) = cf(x) - cg(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ตัวอย่างที่ 3.6 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2 - 3x$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $3(f+g)(x)$

2. $(f+g)(x)$

3. $(f-g)(x)$

4. $(f \cdot g)(x)$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

วิธีทำ

1. $3(f+g)(x) = 3f(x) + 3g(x)$

$$= 3(2x+1) + 3(x^2-3x) = 6x+3+3x^2-9x$$

$$= 3x^2 - 3x + 3$$

2. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (2x+1) + (x^2-3x) = 2x+1+x^2-3x$$

Function Limit and Continuous



$$= x^2 - x + 1$$

$$3. (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$= (2x+1) - (x^2-3x) = 2x+1-x^2+3x$$

$$= 1+5x-x^2$$

$$4. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$= (2x+1)(x^2-3x) = 2x^3+x^2-6x^2-3x$$

$$= 2x^3-5x^2-3x$$

$$5. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{x^2-3x}$$

ตัวอย่างที่ 3.7 กำหนดให้ $f(x) = x-1$ และ $g(x) = x+1$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1. (f+g)(-2)$$

$$3. (f \cdot g)(-4)$$

$$2. (f-g)(2)$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(3)$$

วิธีทำ

$$1. (f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x-1) + (x+1) = x-1+x+1 = 2x$$

$$\therefore (f+g)(-2) = 2(-2) = -4$$

$$2. (f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x-1) - (x+1) = x-1-x-1 = -2$$

$$\therefore (f-g)(2) = -2$$

$$3. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$\therefore (f \cdot g)(-4) = (-4)^2 = 15$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\therefore \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

Function Limit and Continuous



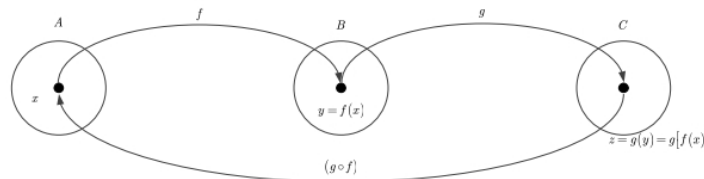
3.4 ฟังก์ชันประกอบ

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจากช่วง A ไปช่วง B หรือ $f: A \rightarrow B$

โดยที่ $y = f(x)$; x เป็นจำนวนในช่วง A , y เป็นจำนวนในช่วง B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปช่วง C หรือ $g: B \rightarrow C$

โดยที่ $z = g(y)$; y เป็นจำนวนในช่วง $f: A \rightarrow B$ เป็นจำนวนในช่วง C

ถ้าตัวแปรตามบางตัว (y) ของฟังก์ชัน f เข้ากับตัวแปรอิสระบางตัว (y) ของฟังก์ชัน g แล้วสามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใหม่ จากตัวแปรอิสระบางตัว (x) ของฟังก์ชัน f ไปยังตัวแปรตามบางตัว (z) ของฟังก์ชัน g ได้ และเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า ฟังก์ชันประกอบของ g โดย f ซึ่งเขียนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$



ภาพที่ 3.1 สัญลักษณ์ของฟังก์ชันประกอบ

จากรูป	$f: A \rightarrow B$	โดยที่ $y = f(x)$
	$g: B \rightarrow C$	โดยที่ $z = g(y)$
และ	$g \circ f: A \rightarrow C$	โดยที่ $z = g[f(x)]$
นั่นคือ	$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$	

ในทำนองเดียวกัน ถ้าตัวแปรตามบางตัวของฟังก์ชัน g เข้ากับตัวแปรอิสระบางตัวของฟังก์ชัน f แล้วสามารถหาฟังก์ชันประกอบของ f โดย g ได้เช่นกัน

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

ตัวอย่างที่ 3.8 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-1}$ และ $g(x) = x^2 + 2$ จงหาค่าฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้

1. $(g \circ f)(x)$
2. $(f \circ g)(x)$

วิธีทำ

Function Limit and Continuous



1. จาก $f(x) = \sqrt{x-1}$ และ $g(x) = x^2 + 2$

$$\therefore (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 2 = (x-1) + 2 = x + 1$$

2. จาก $g(x) = x^2 + 2$ และ $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$\therefore (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 1} = \sqrt{x^2 + 1}$$

ตัวอย่างที่ 3.9 กำหนดให้ $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = \log_2 x$ จงหาค่าฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้

1. $(g \circ f)(x)$ 2. $(g \circ f)(-4)$ 3. $(f \circ g)(x)$ 4. $(f \circ g)(8)$

วิธีทำ

1. จาก $f(x) = 2^x$ และ $g(x) = \log_2 x$

$$\therefore (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2^x) = \log_2 2^x = x \log_2 2 = x$$

2. จากข้อที่ (1)

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$\therefore (g \circ f)(-4) = -4$$

3. จาก $g(x) = \log_2 x$ และ $f(x) = 2^x$

$$\therefore (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x$$

4. จากข้อที่ (3)

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$\therefore (f \circ g)(8) = 8$$

ตัวอย่างที่ 3.10 กำหนดให้ $f(x) = \log x$ และ $g(x) = \begin{cases} 2x+1; & x \leq 0 \\ x^2; & x \geq 0 \end{cases}$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $(f \circ g)(-3)$ 2. $(f \circ g)(10)$ 3. $(g \circ f)(0)$ 4. $(g \circ f)(0.1)$

วิธีทำ

1. $g(-3) = 2(-3) + 1$ ให้ $g(x) = 2x + 1$ เมื่อ $x < 0$

$$= -5$$

ดังนั้น $(f \circ g)(-3) = f[g(-3)] = f(-5) = \log(-5)$

ซึ่ง $= \log(-5)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่าไม่มีฟังก์ชันประกอบ $(f \circ g)(-3)$

Function Limit and Continuous



$$2. g(10) = 10^2 \text{ ให้ } g(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } x < 0$$

$$= 100$$

$$\text{ดังนั้น} \quad (f \circ g)(10) = f[g(10)] = f(100)$$

$$= \log(100) = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

$$3. f(0) = \log(0); \text{ หาค่าไม่ได้}$$

$$\text{ทำให้ } (g \circ f)(0) = g[f(0)] \text{ หาค่าไม่ได้ แสดงว่าไม่มีฟังก์ชันประกอบ } (g \circ f)(0)$$

$$4. f(0.1) = \log(0.1) = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad (g \circ f)(0.1) = g[f(0.1)] = g(-1) = 2(-1) + 1$$

$$\text{กำหนดให้ } g(x) = 2x + 1 \quad \text{เมื่อ } x < 0$$

$$g(x) = -1$$

3.5 ลิมิต

ให้พิจารณาหาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; $x \neq 1$ เมื่อแทนค่า x เข้าใกล้ 1 ได้ผลลัพธ์ตาม

ตารางที่ 3.1 เมื่อแทนค่า x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย และ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา

เมื่อแทนค่า x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย ($x < 1$) ได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 และเรียก 2 ที่ได้นี้ว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย” ซึ่งกำหนดให้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

เมื่อแทนค่า x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา ($x > 1$) จะได้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 และเรียก 2 ที่ได้นี้ว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา” ซึ่งกำหนดให้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

ซึ่งไม่ว่าจะแทนค่า x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้ายหรือขวาก็ตาม ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 เหมือนกัน ซึ่งถ้าเป็นเช่นนั้น เรียกค่า 2 ที่ได้นี้ว่าเป็น “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1” และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Function Limit and Continuous



ตารางที่ 3.1 การหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อแทนค่า x เข้าใกล้ 1

x เข้าใกล้ 1 ทางขวา ($x \rightarrow 1^-$)	ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	x เข้าใกล้ 1 ทางขวา ($x \rightarrow 1^+$)	ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$
0	1	2	3
0.5	1.5	1.5	2.5
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	0.001	2.001
0.9999	1.9999	1.0001	2.0001

3.5.1 ทฤษฎีลิมิต

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ และ a, L เป็นจำนวนจริง

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ถ้าลิมิตทางด้านซ้ายหรือลิมิตด้านขวาของ $f(x)$ หาค่าไม่ได้ หรือหาค่าได้แต่ไม่เท่ากัน กล่าว
ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่มีค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ a การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ถ้าสามารถเขียนกราฟของ
ฟังก์ชันได้ ทำให้มองเห็นทฤษฎีและหลักการของลิมิตได้ชัดเจน

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

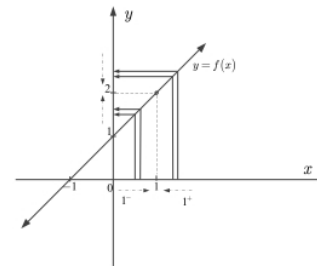
วิธีทำ

จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow 1^-$ ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ $f(x) \rightarrow 2$

และเมื่อ $x \rightarrow 1^+$ ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ $f(x) \rightarrow 2$

$$\text{สรุปได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$



Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.12 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x < 2 \\ x+2 & ; x > 2 \end{cases}$

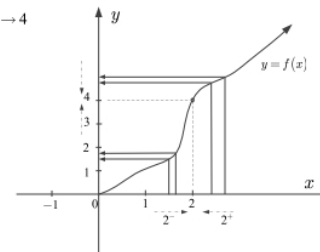
วิธีทำ

จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow 2^-$ ฟังก์ชันจะมีค่าเข้าใกล้ $f(x) \rightarrow 4$

และเมื่อ $x \rightarrow 2^+$ ฟังก์ชันจะมีค่าเท่ากับ $f(x) \rightarrow 4$

สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$



ตัวอย่างที่ 3.13 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \leq 5 \\ 2x+10 & ; x > 5 \end{cases}$

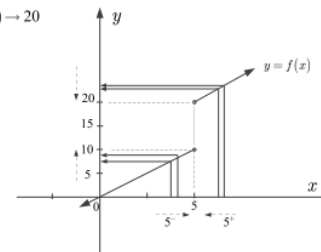
วิธีทำ

จากกราฟของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow 5^-$ ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ $f(x) \rightarrow 10$

และเมื่อ $x \rightarrow 5^+$ ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ $f(x) \rightarrow 20$

สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \text{ไม่มีขีดจำกัด}$



3.5.2 ทฤษฎีเบื้องต้นของลิมิต

กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ สามารถหาค่าลิมิตได้ ทฤษฎีต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันคงที่
2. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$; $f(x) = x^n$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
3. $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$; c เป็นค่าคงที่

Function Limit and Continuous



$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ โดยที่ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \text{ โดยที่ } n \text{ เป็นเลขคู่แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0 \text{ (เป็นบวกหรือ 0)}$$

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 4x + 5)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 4x + 5) &= \lim_{x \rightarrow -1} 3x^4 - \lim_{x \rightarrow -1} 4x + \lim_{x \rightarrow -1} 5 \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow -1} x^4 - 4 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 5 \\ &= 3(-1)^4 - 4(-1) + 5 \\ &= 3 + 4 + 5 = 12 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 1)(3x + 2)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 1)(3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (3x + 2) \\ &= [\lim_{x \rightarrow 3} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 1] [\lim_{x \rightarrow 3} 3x + \lim_{x \rightarrow 3} 2] \\ &= [4 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 1] [3 \lim_{x \rightarrow 3} x + 2] \\ &= [4(3)^2 - 1] [3(3) + 2] \\ &= (36 - 1)(9 + 2) = 385 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 - 3}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x + 1}{x^2 - 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3} \end{aligned}$$

Function Limit and Continuous



$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3} \\ &= \frac{(2)^3 + 3(2) + 1}{(2)^2 - 3} \\ &= \frac{8 + 6 + 1}{4 - 3} = \frac{15}{1} = 15 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.17 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$

วิธีทำ

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \sqrt{0^-}$ เป็นจำนวนจินตภาพ จึงไม่มีค่าลิมิต

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$$

จะได้ว่า ลิมิตทางซ้ายหาค่าไม่ได้ แต่ลิมิตทางขวาหาค่าได้

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ ไม่มีค่าลิมิต

ตัวอย่างที่ 3.18 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 4x+3; & x < 2 \\ x^2+3; & x \geq 2 \end{cases}$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (4x+3) = 4(4)+3 = 19$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2+3) = 4^2+3 = 19$$

จะได้ ลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวา $\therefore \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 19$

3.5.3 การหาค่าลิมิตในรูป $\frac{0}{0}$

$\frac{0}{0}$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form) คือ บอกได้ว่ามีค่าเท่ากับอะไร ดังนั้น

การหาค่าลิมิตแล้วประสบกับปัญหาของจำนวนในลักษณะดังกล่าว ไม่สามารถสรุปคำตอบได้ ต้องใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น การแยกตัวประกอบ คุณสมบัติของคู่สังยุค และอื่น ๆ เข้าแก้ไขก่อน จึงสามารถสรุปคำตอบของลิมิตได้

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

วิธีทำ

ลองแทนหาค่าลิมิต $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{0}{0}$ ไม่สามารถสรุปคำตอบได้

Function Limit and Continuous



$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) \\ &= 2^2 + 2(2) + 4 = 12\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.20 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x} = \frac{\sqrt{4-0}-2}{0} = \frac{0}{0}$$

ดังนั้นใช้วิธีการคูณสังยุค จะได้

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4-x)-4}{x(\sqrt{4-x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{4-x}+2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4-0}+2} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.21 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4} \right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{0} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{4-(x+1)}{4(x+4)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{-x}{4(x+4)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(x+4)} \\ &= \frac{-1}{4(4)} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.22 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \left(\frac{1}{x+1} + 1 \right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \left(\frac{1}{x+1} + 1 \right) = \frac{1}{0} (-1+1) = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \left(\frac{1}{x+1} + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \left(\frac{1+(x+1)}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \left(\frac{x+2}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-2+1} = -1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.23 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{3|x|-6}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{3|x|-6} = \frac{|2-2|}{3|2|-6} = \frac{0}{6-6} = \frac{0}{0}$$

$$\text{จาก } |x| = \begin{cases} x-2 & ; x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & ; x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{และ } |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{3|x|-6} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{3x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{3(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{3|x|-6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{3x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{3(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

จะได้ว่า ลิมิตทางซ้าย ไม่เท่ากับ ลิมิตทางขวา

3.6 ลิมิตกับปัญหาค่าอนันต์

3.6.1 ค่าอนันต์

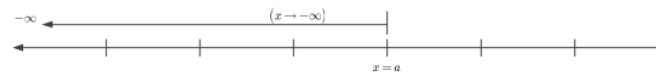
ค่าอนันต์ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\pm\infty$ ซึ่งมีความหมายดังนี้

1. $-\infty$ หมายถึง ค่าที่มีจำนวนน้อย ๆ (ไม่ทราบว่ามีน้อยขนาดไหน) ซึ่งเป็นค่าที่อยู่ทางด้านซ้ายของเส้นจำนวนจริงโดยไม่มีจุดสิ้นสุด

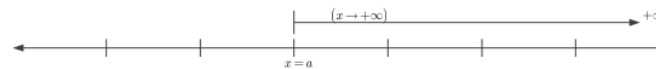
Function Limit and Continuous



2. $+\infty$ หรือ ∞ หมายถึง ค่าที่มีจำนวนมาก ๆ (ไม่ทราบว่ามีขนาดไหน) ซึ่งเป็นค่าที่อยู่ทางด้านขวาของเส้นจำนวนจริง โดยไม่มีจุดสิ้นสุด



ภาพที่ 3.2 จำนวนจริงที่มีค่าเข้าใกล้ $-\infty$



ภาพที่ 3.3 จำนวนจริงที่มีค่าเข้าใกล้ $+\infty$

ทฤษฎีของลิมิตกับปัญหาคำนวณที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนบวก
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนบวก
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนบวก
5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก

ตัวอย่างที่ 3.24 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^5} \right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^5} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} - 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5} = 3(0) + 4(0) - 5(0) = 0$$

Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.25 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - 5 \right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^4} - 5 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} - \lim_{x \rightarrow 0^-} 5 = \infty - 5 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^4} - 5 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} - \lim_{x \rightarrow 0^+} 5 = \infty - 5 = \infty$$

จะได้ว่า ลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวา

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - 5 \right) = \infty$$

ตัวอย่างที่ 3.26 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = 1 + \infty = \infty$$

จะได้ว่า ลิมิตทางซ้ายไม่เท่ากับลิมิตทางขวา

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = \text{ไม่มีลิมิต}$$

ตัวอย่างที่ 3.27 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^5 + \frac{2}{x} \right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^5 + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \infty + 2(0) = \infty$$

ตัวอย่างที่ 3.28 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^6}{2} - \frac{9}{x^2} \right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^6}{2} - \frac{9}{x^2} \right) &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^6 - 9 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2}(\infty) - 9(0) = \infty \end{aligned}$$

Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.29 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 + 2x^3 + x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 + 2x^3 + x) &= 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 + 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} x \\ &= 4(-\infty) + 2(-\infty) + (-\infty) = -\infty\end{aligned}$$

3.6.2 การหาลิมิตในรูป $\pm \frac{\infty}{\infty}$

$\pm \frac{\infty}{\infty}$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดเช่นเดียวกับรูป $\frac{0}{0}$ ดังนั้นจึงบอกไม่ได้ว่ามีค่าเท่ากับเท่าไร

ดังนั้น การแก้ปัญหาในกรณีนี้ ให้นำตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดในโจทย์หารทั้งเศษและส่วน

ตัวอย่างที่ 3.30 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

ดังนั้น ให้นำ x^2 หารทั้งเศษและส่วน

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}(2x^2 + 3x - 4)}{\frac{1}{x^2}(x^2 + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 + 0} = 2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.31 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 1}{2x^5 - x^2 + 5}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 1}{2x^5 - x^2 + 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

ดังนั้น ให้นำ x^5 หารทั้งเศษและส่วน

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 2x^3 - 1}{2x^5 - x^2 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^5}(6x^5 + 2x^3 - 1)}{\frac{1}{x^5}(2x^5 - x^2 + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^5}}{2 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^5}} = \frac{6 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = 3\end{aligned}$$

Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.32 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+5}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+5} = \frac{\infty}{\infty}$$

ดังนั้น ให้นำ x หารทั้งเศษและส่วน

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{1-0}}{2+0} = \frac{1}{2}$$

3.6.3 ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะกับค่าอนันต์

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนี้

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad ; a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \quad ; b_m \neq 0$$

$$\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

ตัวอย่างที่ 3.33 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 2x^5 - 3x^2 + 1}{x^4 - 3x^2 + 6x - 5}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 2x^5 - 3x^2 + 1}{x^4 - 3x^2 + 6x - 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 7x^2 = \infty \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.34 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^8 + 3x^4 - x + 1}{3x^8 + 2x^3 + 3x - 1}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^8 + 3x^4 - x + 1}{3x^8 + 2x^3 + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^8}{3x^8} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.35 จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 3x - 6)^8}{(4 + 3x^2 + x^4)^4}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 3x - 6)^8}{(4 + 3x^2 + x^4)^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2)^8}{(x^4)^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^8 \cdot x^{16}}{x^{16}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2^8 = 2^8 = 256\end{aligned}$$

3.7 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

นิยาม ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริงทุกข้อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่ สามารถดูได้จากเส้นกราฟอีกวิธีหนึ่ง ถ้ากราฟของฟังก์ชันไม่ขาดตอนที่ $x = a$ แสดงว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = a$ แต่ถ้ากราฟขาดตอนที่ $x = a$ แสดงว่าฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$

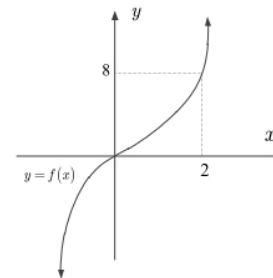
ตัวอย่างที่ 3.36 กำหนดให้ $f(x) = x^3$ จงพิจารณา f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ

พิจารณาเงื่อนไขดังนี้

1. จาก $f(x) = x^3$
 $\therefore f(2) = 2^3 = 8$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3$
 $= 2^3 = 8$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$



Function Limit and Continuous



ตัวอย่างที่ 3.37 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ จงพิจารณา f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

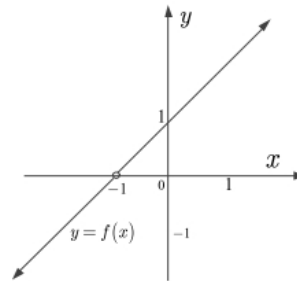
วิธีทำ

พิจารณาเงื่อนไขดังนี้

$$1. \text{ จาก } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \quad ; x \neq -1$$

$\therefore f(-1)$ หาไม่ได้

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \end{aligned}$$



จะได้ ลิมิตของฟังก์ชันหาได้ แต่ $f(-1)$ หาไม่ได้ ทำให้เงื่อนไขไม่ครบตามนิยาม

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

ตัวอย่างที่ 3.38 กำหนดให้ $g(x) = \begin{cases} 1; & x < 1 \\ x^2 + 2; & x \geq 1 \end{cases}$ จงพิจารณา $g(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ

พิจารณาเงื่อนไขดังนี้

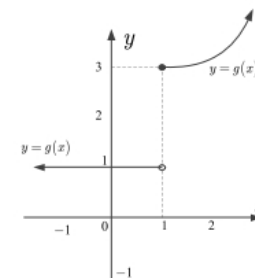
$$1. g(1) = 1 + 2 = 3; g(x) = x^2 + 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ไม่มีค่าลิมิต



จะได้ $g(x) = 1$ แต่ลิมิตของ $g(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ไม่มีค่า

ดังนั้น ฟังก์ชัน g ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

Function Limit and Continuous



3.8 บทสรุป

ในบทนี้ได้อธิบายรูปแบบของฟังก์ชัน วิธีการคำนวณหาค่าของฟังก์ชันต่าง ๆ และฟังก์ชันประกอบ ซึ่งช่วยให้ผู้เรียนทราบถึงฟังก์ชันต่าง ๆ ที่มีลักษณะที่แตกต่างกัน กล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้วยทฤษฎีบทต่าง ๆ แสดงวิธีการหาค่าลิมิตด้วยเทคนิคขั้นสูง แสดงการหาค่าลิมิตที่อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงลิมิตค่าอนันต์ ลิมิตที่ค่าอนันต์ และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ลิมิตของฟังก์ชันเข้าสู่จุดที่สนใจและเป็นฟังก์ชันมีลักษณะมีความต่อเนื่อง ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการเรียนในบทต่อ ๆ ไป รวมทั้งสามารถนำไปใช้ช่วยในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ได้

3.9 คำถามท้าทาย

แบบฝึกหัดหัวข้อเรื่องฟังก์ชัน

1. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

- | | | |
|-------------|--------------|---------------|
| 1.1 $f(-3)$ | 1.4 $f(y)$ | 1.7 $f(y-z)$ |
| 1.2 $f(2)$ | 1.5 $f(a^2)$ | 1.8 $f(x+h)$ |
| 1.3 $f(-4)$ | 1.6 $f(x^2)$ | 1.9 $f(2x-3)$ |

2. กำหนดให้ $g(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t = 0 \\ -1; & t < 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $g(10), g(-\sqrt{3}), g(0)$ และ $g(-\frac{18}{5})$

3. กำหนดให้ $h(p) = \begin{cases} p; & -1 \leq p < 0 \\ 3-p; & 0 \leq p < 3 \\ 2p^2; & 3 \leq p \leq 5 \end{cases}$ จงหาค่าของ $h(0), h(4), h(-\frac{1}{2})$ และ $h(\frac{1}{2})$

4. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^2 + x$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

- | | |
|------------------------|-----------------------------------|
| 4.1 $(f+g)(x)$ | 4.5 $(f+g)(2)$ |
| 4.2 $(f-g)(x)$ | 4.6 $(f-g)(-\frac{1}{2})$ |
| 4.3 $(fg)(x)$ | 4.7 $(fg)(-5)$ |
| 4.4 $(\frac{f}{g})(x)$ | 4.8 $(\frac{f}{g})(-\frac{1}{2})$ |

5. กำหนดให้ $f(x) = 2x-3$ และ $g(x) = x^2+5$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

Function Limit and Continuous



$$5.1 g[f(2)]$$

$$5.3 f[g(a-1)]$$

$$5.2 f[g(3)]$$

$$5.4 f[g(x+1)]$$

6. กำหนดให้ $f(x) = \log(x^2 - 1)$ และ $g(x) = 5^x$ จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$6.1 f[g(x)]$$

$$6.3 g[g(x)]$$

$$6.2 g[f(x)]$$

$$6.4 f[f(x)]$$

7. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ จงหาฟังก์ชันประกอบ $(g \circ f)(x)$ และ $(f \circ g)(x)$

$$7.1 f(x) = 3x - 1 \quad ; g(x) = 4x + 2$$

$$7.2 f(x) = 5 - 2x \quad ; g(x) = 4x$$

$$7.3 f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad ; g(x) = x - 1$$

$$7.4 f(x) = 2x + 3 \quad ; g(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$7.5 f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad ; g(x) = 2x$$

$$7.6 f(x) = 4 \quad ; g(x) = \sqrt{x^2 + 7x}$$

8. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x^2 - 2x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + x + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (4x^2 + 5)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 5}{x - 1}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 5x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} x^2 (x^3 - 1)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 4x + 6}{2x^3 + 1}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^2 - a^2}{x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3)(2x + 5)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{3x}} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3+x}}{\sqrt{3+x}} \right)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{9 - (3+x)^2}{9(3+x^2)} \right]$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3} \right)$$

9. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 9}{4x^3 + 1}$$

Function Limit and Continuous



$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^4 + 3x - 1)^5}{(5x^4 + 3x^2 + 8)^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(6 - 7x^4 + x^8)}{(x^2 - x + 3)^4}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 7x^2 + 3x^4 - 9x^7}{3x^3 + 2x^6 - 13}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 4x + 2x^3}{5x^3 - 8x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 5}{\sqrt{1+x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 15}{3x + 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 3x - 4x^2}{4 + 5x^2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^6 - 3x^2 + 1}{2x^6 + x^3 + 5}$$

10. แบบฝึกหัดหัวข้อเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1. กำหนดให้ $g(x) = 2x + 1$ จงพิจารณาว่า g ต่อเนื่องที่ $x = 0, 1$ หรือไม่

2. กำหนดให้ $h(x) = x^2 - 1$ จงพิจารณาว่า h ต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

3. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $x = -2, 0$ หรือไม่

4. กำหนดให้ $g(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ จงพิจารณาว่า g ต่อเนื่องที่ $x = -3, 3$ หรือไม่

5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 1 \\ 2-x; & x > 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

6. กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x > 2 \\ 2x - 1; & x \geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า h ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

7. จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่ค่า x ใดหรือไม่

$$7.1 \ f(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

$$7.2 \ f(x) = 3x^2 - 3$$

$$7.3 \ f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+3x-4}$$

$$7.4 \ f(x) = \frac{x-7}{x^3-x}$$

$$7.5 \ f(x) = \frac{x}{x^3+1}$$

$$7.6 \ f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2+2x-15}$$

$$7.7 \ f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$

$$7.8 \ f(x) = \begin{cases} x+4; & x > -2 \\ 3x+6; & x \leq -2 \end{cases}$$