NPRU

Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Telecommunications Engineering

Faculty of Science and Technology

Nakhon Pathom Rajabhat University

Electrical Engineering

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. อนุพันธ์
2. การหาอนุพันธ์ด้วยนิยามและโดยการใช้สูตร
3. อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
4. อนุพันธ์โดยปริยาย
5. อนุพันธ์อันดับสูง
6. กฎของโลปิตาล
7. การประยุกต์ใช้อนุพันธ์

NPRU

ในบทนี้ได้กล่าวถึงอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในระบบพิกัดฉาก ดังนั้น อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันสามารถแทนด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชัน แสดงวิธีหาค่าอนุพันธ์ด้วยนิยาม การหาค่าอนุพันธ์โดยสูตร การหาค่าอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน การหาค่าอนุพันธ์โดยปริยาย อนุพันธ์อันดับสูง กฎของโลปิตาล การแก้ปัญหาค่าลิมิตในรูปแบบที่ยังไม่ได้กำหนดด้วยอนุพันธ์ และการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ เพื่อเป็นความรู้ฐานในการศึกษาขั้นสูงต่อไป

4.1 ส่วนที่เปลี่ยน

ถ้าให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนใด ๆ ค่าที่เปลี่ยนจาก x_1 ไปยัง x_2 เรียกว่าส่วนที่เปลี่ยนของ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ Δx ดังนั้น

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

หรือ $x_2 = x_1 + \Delta x$

ในทำนองเดียวกัน Δy หมายถึง ส่วนที่เปลี่ยนของ y จาก y_1 ไปยัง y_2 จะได้

$$\Delta y = y_2 - y_1 \text{ หรือ } y_2 = y_1 + \Delta y$$

เช่น x เปลี่ยนจาก $x_1 = 2.2$ ไปยัง $x_2 = 5.5$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5.5 - 2.2 = 3.3$$

y เปลี่ยนจาก $y_1 = 4$ ไปยัง $y_2 = -1$

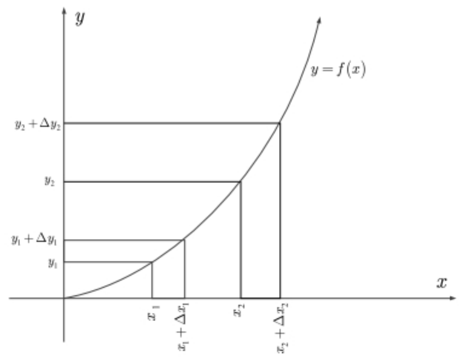
$$\Delta y = y_2 - y_1 = -1 - 4 = -5$$

จากภาพที่ 4.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ถ้าค่า x มีส่วนที่เปลี่ยน Δx แล้วค่า y มีส่วนที่เปลี่ยน Δy เสมอ

ถ้า $y = f(x)$ แล้ว

$$y_1 + \Delta y_1 = f(x_1 + \Delta x_1)$$

$$y_2 + \Delta y_2 = f(x_2 + \Delta x_2)$$



ภาพที่ 4.1 การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

ดังนั้น $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

จาก $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$

$=f(x+\Delta x)-f(x)$

ถ้า $y=f(x)$ แล้ว $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $y=x^2+3x-4$ ถ้า $x=2$ และ $\Delta x=1$ จงหา Δy

วิธีทำ

ถ้า $y=f(x)=x^2+3x-4$ แล้ว

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$=\left[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-4\right]-(x^2+3x-4)$$

$$=x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+3x+3\Delta x-4-x^2-3x+4$$

$$=2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+3\Delta x$$

แทน $x=2$ และ $\Delta x=1$ จะได้

$$\therefore \quad \Delta y=2(2)(1)+(1)^2+3(1) \quad =4+1+3=8$$

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ $y=\frac{1}{x+1}$ ถ้า $x=3$ และ $\Delta x=2$ จงหา Δy

วิธีทำ

ถ้า $y=f(x)=\frac{1}{x+1}$ แล้ว

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{(x+\Delta x)+1}-\frac{1}{x+1}$$

แทน $x=3$ และ $\Delta x=2$

$$\therefore \quad =\frac{1}{(3+2)+1}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$$

4.2 อนุพันธ์

นิยามของอนุพันธ์ กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ $f(x)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x)$ อ่านว่า “f prime x” ซึ่งกำหนดขึ้นดังนี้

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4.1}$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ กล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f'(x)$ เรียกว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x” ถ้า $y=f(x)$ แล้ว อนุพันธ์ของ f ที่ x นอกจากเขียนแทนด้วย $f'(x)$ ยังสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์อื่นได้อีก คือ y', $\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{df(x)}{dx}$ จากนิยาม ให้ $\Delta x=h$ แล้วสามารถเขียนสูตรอนุพันธ์ด้วยนิยามได้อีกสูตรดังสมการที่ (4.2)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4.2}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)$

วิธีทำ

จาก $f(x)=x^3-2x^2+x-1$

$$\therefore \quad f(x+h)=(x+h)^3-2(x+h)^2+(x+h)-1$$

$$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2\left(x^2+2xh+h^2\right)+x+h-1$$

$$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x^2-4xh-2h^2+x+h-1$$

จากนิยาม $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x^2-4xh-2h^2+x+h-1\right]-\left(x^3-2x^2+x-1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x^2-4xh-2h^2+x+h-1-x^3+2x^2-x+1}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-4xh-2h^2+h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2-4x-2h+1\right)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2-4x-2h+1\right) = 3x^2+3x(0)+(0)^2-4x-2(0)+1$$

$$= 3x^2-4x+1$$

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}};x>0$ จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)$

วิธีทำ

จาก $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\therefore\ f(x+h)=\frac{1}{\sqrt{x+h}}$$

จากนิยาม $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+h}\right)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+h}\right)}\right]\left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\left(\sqrt{x+h}\right)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x\sqrt{x+h}+\sqrt{x}(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x\sqrt{x+h}+\sqrt{x}(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1}{x\sqrt{x+h}+\sqrt{x}(x+h)}\right]$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x+0}+\sqrt{x}(x+0)}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดให้ $f(x)=\frac{1}{x^2}; x \neq 0$ จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)$

วิธีทำ

จาก $\quad f(x)=\frac{1}{x^2}$

$\therefore \quad f(x+h)=\frac{1}{(x+h)^2}$

จากนิยาม $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{x^2(x+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{-(2x+0)}{x^2(x+0)^2}$$

$$= \frac{-2x}{x^2x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

NPRU

4.3 การหาอนุพันธ์โดยการใช้สูตร

การหาอนุพันธ์โดยการใช้นิยามนั้นเป็นการยุ่งยากและทำให้เสียเวลามาก ดังนั้นจึงมีการสร้างสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันขึ้นแทนการใช้นิยาม ซึ่งต่อไปนี้เป็นสูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ ซึ่งได้แก่ อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย ได้แก่ ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

4.3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ให้ $u(x), v(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ c เป็นค่าคงที่

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ เมื่อ n เป็นค่าคงที่
6. $\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^{2/3}} + 10x - 5$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^5 + 3x^4 - \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^{2/3}} + 10x - 5\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x^5) + \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^{2/3}}\right) + \frac{d}{dx}(10x) - \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(x^5) + 3\frac{d}{dx}(x^4) - 4\frac{d}{dx}(x^{-3}) + 2\frac{d}{dx}\left(x^{-2/3}\right) + 10\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 2(5x^{5-1})\frac{dx}{dx} + 3(4x^{4-1})\frac{dx}{dx} - 4(-3x^{-3-1})\frac{dx}{dx} + 2\left(\frac{-2}{3}x^{\frac{-2}{3}-1}\right)\frac{dx}{dx} + 10\frac{dx}{dx} - 0$$

$$= 10x^4(1) + (12x^3)(1) + (12x^{-4})(1) - \left(\frac{4}{3}x^{\frac{-5}{3}}\right)(1) + 10(1)$$

$$= 10x^4 + 12x^3 + \frac{12}{x^4} - \frac{4}{3x^{5/3}} + 10$$

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้ $y=(6x+1)^7(2x-3)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(6x+1)^7(2x-3)^3 \\
&= (6x+1)^7\frac{d}{dx}(2x-3)^3+(2x-3)^3\frac{d}{dx}(6x+1)^7 \\
&= (6x+1)^7\left[3(2x-3)^2\frac{d}{dx}(2x-3)\right]+(2x-3)^3\left[7(6x+1)^6\frac{d}{dx}(6x+1)\right] \\
&= (6x+1)^7\left[3(2x-3)^2(2)\right]+(2x-3)^3\left[7(6x+1)^6(6)\right] \\
&= 6(6x+1)^7(2x-3)^2+42(6x+1)^6(2x-3)^3 \\
&= 6(6x+1)^6(2x-3)^2+\left[(6x+1)+7(2x-3)\right] \\
&= 6(6x+1)^6(2x-3)^2(20x-20) \\
&= 120(6x+1)^6(2x-3)^2(x-1)
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.8 กำหนดให้ $y=\left(\frac{2x+5}{x^2+9}\right)^4$ จงหา y'

วิธีทำ

จาก $y=\left(\frac{2x+5}{x^2+9}\right)^4$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}=y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+5}{x^2+9}\right)^4 \\
&= 4\left(\frac{2x+5}{x^2+9}\right)^3\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+5}{x^2+9}\right) \\
&= \frac{4(2x+5)^3}{(x^2+9)^3}\left[\frac{(x^2+9)\frac{d}{dx}(2x+5)-(2x+5)\frac{d}{dx}(x^2+9)}{(x^2+9)^2}\right] \\
&= \frac{4(2x+5)^4}{(x^2+9)^5}\left[2(x^2+9)-2x(2x+5)\right] \\
&= \frac{4(2x+5)^3}{(x^2+9)^5}(2x^2+18-4x^2-10x) \\
&= \frac{4(2x+5)^3}{(x^2+9)^5}(18-10x-2x^2)
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างทั้งหมดสังเกตพบว่า หาอนุพันธ์ของ (vu) บ่อย ๆ ซึ่งต้องใช้สูตร $\frac{d}{dx}u^n$ เสมอ คือ $\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{d}{dx}u^{n\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}=\frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$ พบว่า $\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$ ถ้านำสูตร $\frac{d}{dx}\sqrt{u}$ ไปใช้หาอนุพันธ์ สะดวกกว่าการใช้สูตร $\frac{d}{dx}u^n$ ไปใช้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4.9 ให้ $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+9}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+9}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}\left[\sqrt{x^2+9}\frac{d}{dx}\sqrt{x}-\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+9}\right]$$

$$=\frac{1}{x^2+9}\left[\sqrt{x^2+9}\left(\frac{1}{2x}\frac{dx}{dx}\right)-\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\frac{d}{dx}(x^2+9)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x^2+9}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{2x}-\frac{\sqrt{x}(2x)}{2\sqrt{x^2+9}}\right] \quad =\frac{1}{x^2+9}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}}{2x}-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+9}}\right]$$

4.3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)>0$ สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมมี 2 สูตร คือ

1. $\frac{d}{dx}\log u=\frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่ $a>0$ และ $a\neq 1$ และ e เป็นค่าคงที่เฉพาะ และ e มีค่าประมาณ 2.71828

$$\ln(u)=\log_e(u)$$

สมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม ให้ u และ v เป็นจำนวนจริงบวก n เป็นจำนวนจริงใด ๆ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a\neq 1$

1. $\log_a uv=\log_a u+\log_a v$
2. $\log_a \frac{u}{v}=\log_a u-\log_a v$
3. $\log_a u^n=n\log_a u$
4. $\log_a a=1$
5. $\log_a 1=0$

ตัวอย่างที่ 4.10 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\log_5\left(x+\sqrt{x}\right)$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log_5\left(x+\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x}}(\log_5 e)\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x}}(\log_5 e)\left(\frac{dx}{dx}+\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x}}(\log_5 e)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x}}(\log_5 e)\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+2x}(\log_5 e) \quad =\frac{2\sqrt{x}+1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}(\log_5 e)$$

ตัวอย่างที่ 4.11 ให้ $y=\log_2^3(2-3x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$y=\log_2^3(2-3x)=\left[\log_2(2-3x)\right]^3$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\log_2(2-3x)\right]^3$$

$$=3\left[\log_2(2-3x)\right]^2\frac{d}{dx}\log_2(2-3x)$$

$$=3\log_2^2(2-3x)\left(\frac{1}{2-3x}\right)\log_2 e\frac{d}{dx}(2-3x)$$

$$=3\log_2^2(2-3x)\frac{(-3)}{2-3x}(\log_2 e) \quad =\frac{-9}{2-3x}(\log_2 e)\log_2^2(2-3x)$$

ข้อควรระวัง 1. $\log_a u^n = n\ \log_a u$ 2. $\log_a^n u=\left[\log_a u\right]^n$

ตัวอย่างที่ 4.12 ให้ $y=\left(\ln^2 x\right)\left(\ln e^{x^2}\right)$

วิธีทำ

$$y=\left(\ln^2 x\right)\left(\ln e^{x^2}\right) \quad =(\ln x)^2\left(x^2\ln e\right) \qquad \text{เมื่อ } ;\ln e=1$$

$$=(\ln x)^2\left(x^2\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(\ln x)^2(x^2)\right]$$

$$=(\ln x)^2\frac{d}{dx}x^2+x^2\frac{d}{dx}(\ln x)^2$$

$$=2x\ln^2 x+2x^2\ln x\frac{d}{dx}\ln x$$

$$=2x\ln^2 x+2x^2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=2x\ln^2 x+2x\ln x \quad =2x\ln x(\ln x+1)$$

ตัวอย่างที่ 4.13 ให้ $y=\ln^2(4x-3)\left(\log 10^{x^2}\right)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่ $x=1$

วิธีทำ

$$y=\ln^2(4x-3)\left(\log 10^{x^2}\right)$$

$$=\ln^2(4x-3)(x^2)(\log 10) \qquad \text{เมื่อ } ;\log 10=\log_{10}(10)=1$$

$$=x^2\ln^2(4x-3)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[x^2\ln^2(4x-3)\right] \quad =x^2\frac{d}{dx}\ln^2(4x-3)+\ln^2(4x-3)\frac{d}{dx}x^2$$

$$=2x^2\ln(4x-3)\frac{d}{dx}\ln(4x-3)+2x\ln^2(4x-3)$$

$$=\frac{2x^2\ln(4x-3)}{4x-3}\frac{d}{dx}(4x-3)+2x\ln^2(4x-3)$$

$$=\frac{8x^2\ln(4x-3)}{4x-3}+2x\ln^2(4x-3)$$

หาค่า $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=1$ จะได้

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{8(1)\ln 1}{1}+2(1)\ln^2 1 \quad =8(0)+2(0)=0$$

4.3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง

ให้ $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลังมี 3 สูตร คือ

1. $\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\frac{du}{dx}$ 2. $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}u^v=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\ln u\frac{dv}{dx}$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่ $a>0$ และ $a \neq 1$ และ ซึ่ง e มีค่าประมาณ 2.71828 สมบัติเบื้องต้นของเลขยกกำลัง กำหนดให้ a , b , c , x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{1}{a^{y-x}}; a^y \neq 0$ 3. $(a^x)^y = a^{xy}$

4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; b \neq 0$ 6. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}; a^x \neq 0$

การใช้สูตรหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง มีหลักการพิจารณาเลือกใช้สูตรได้ดังนี้

1. $(\text{ค่าคงที่})^{(\text{กลุ่มตัวแปร})}$ ใช้สูตร $\frac{d}{dx}a^u$

2. $e^{(\text{กลุ่มตัวแปร})}$ ใช้สูตร $\frac{d}{dx}e^u$

3. $(\text{กลุ่มตัวแปร})^{(\text{กลุ่มตัวแปร})}$ ใช้สูตร $\frac{d}{dx}u^v$

แต่ถ้าอยู่ในรูป $(\text{กลุ่มตัวแปร})^{(\text{ค่าคงที่})}$ ใช้สูตร $\frac{d}{dx}u^n$ ซึ่งเป็นสูตรการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 4.14 ให้ $y = 5^{\ln\sqrt{x-4}}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}5^{\ln\sqrt{x-4}}$$

$$= 5^{\ln\sqrt{x-4}}(\ln 5)\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x-4}$$

$$= 5^{\ln\sqrt{x-4}}(\ln 5)\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln(x-4)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 5)5^{\ln\sqrt{x-4}}\left(\frac{1}{x-4}\right)\frac{d}{dx}(x-4)$$

$$= \frac{(\ln 5)5^{\ln\sqrt{x-4}}}{2(x-4)}$$

ตัวอย่างที่ 4.15 จงหาอนุพันธ์ของ $y = e^{\log(x^2+4)}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\log(x^2+4)}$$

$$= e^{\log(x^2+4)} \frac{d}{dx} \log(x^2+4)$$

$$= e^{\log(x^2+4)} \left(\frac{1}{x^2+4}\right)(\log e) \frac{d}{dx}(x^2+4)$$

$$= e^{\log(x^2+4)} \left(\frac{\log e}{x^2+4}\right)(2x) \quad = \frac{2x(\log e) e^{\log(x^2+4)}}{x^2+4}$$

ตัวอย่างที่ 4.16 จงหาอนุพันธ์ของ $w = x^{\log^2 x}$

วิธีทำ

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} x^{\log^2 x}$$

$$= (\log^2 x) x^{\log^2 (x-1)} \frac{dx}{dx} + x^{\log^2 x} \ln x \frac{d}{dx} \log^2 x$$

$$= (\log^2 x) x^{\log^2 (x-1)} + (\ln x) x^{\log^2 x} \left(2 \ln x \frac{d}{dx} \log x\right)$$

$$= (\log^2 x) \frac{x^{\log^2 x}}{x} + (2 \ln x \log x) x^{\log^2 x} \left(\frac{1}{2} \log e\right)$$

$$= \frac{(\log x) x^{\log^2 x}}{x} [\log x + 2(\ln x \log e)]$$

4.3.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติมี 6 สูตร คือ

1. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.17 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\sin\left(\ln 2^x\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\sin\left(\ln 2^x\right) \\
&= \cos\left(\ln 2^x\right)\frac{d}{dx}(x\ln 2) \\
&= \cos\left(\ln 2^x\right)\left(\ln 2\frac{dx}{dx}\right) \\
&= (\ln 2)\cos\left(\ln 2^x\right)
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.18 จงหาอนุพันธ์ของ $y=e^x\tan(\sec x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(e^x\tan(\sec x)\right) \\
&= e^x\frac{d}{dx}\tan(\sec x)+\tan(\sec x)\frac{d}{dx}e^x \\
&= e^x\sec x^2(\sec x)\frac{d}{dx}\sec x+e^x\tan(\sec x) \\
&= e^x\sec^2(\sec x)\sec x\tan x\frac{d}{dx}x+e^x\tan(\sec x) \\
&= e^x\sec^2(\sec x)\sec x\tan x+e^x\tan(\sec x) \\
&= e^x\left[\sec x\tan x\sec^2(\sec x)+\tan(\sec x)\right]
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.19 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\ln\sqrt{\cot x\cos\sec x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\cot x\operatorname{cosec} x}\right) = \ln(\cot x\operatorname{cosec} x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln(\cot x\operatorname{cosec} x) = \frac{1}{2}\left[\ln\cot x+\ln\operatorname{cosec} x\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln\cot x+\frac{d}{dx}\ln\operatorname{cosec} x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cot x}\frac{d}{dx}\cot x+\frac{1}{\operatorname{cosec} x}\cdot\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}-\frac{\operatorname{cosec} x\cot x}{\operatorname{cosec} x}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}+\cot x\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 x+\cot^2 x}{\cot x}\right] = -\frac{\operatorname{cosec}^2 x+\cot^2 x}{2\cot x}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.20 ให้ $f(x)=\dfrac{2^{\tan x}}{\sec x}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2^{\tan x}}{\sec x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sec^2 x}\left[\sec x\frac{d}{dx}\left(2^{\tan x}\right)-2^{\tan x}\frac{d}{dx}(\sec x)\right]$$

$$=\cos^2 x\left[\sec x\left(2^{\tan x}\right)\ln 2\frac{d}{dx}(\tan x)-2^{\tan x}(\sec x\tan x)\right]$$

$$=\cos^2 x\left[\ln 2\left(2^{\tan x}\right)(\sec x)\left(\sec^2 x\right)-2^{\tan x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right]$$

$$=\cos^2 x\left[\ln 2\left(2^{\tan x}\right)(\sec x)\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)-\left(\frac{2^{\tan x}\sin x}{\cos^2 x}\right)\right]$$

$$=\left[\ln 2\left(2^{\tan x}\right)(\sec x)\right]-\left(2^{\tan x}\sin x\right)\quad=2^{\tan x}\left[\ln 2(\sec x)-\sin x\right]$$

ตัวอย่างที่ 4.21 ให้ $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$ จงหา $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ

จัดรูปใหม่ $\quad f(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

$$=\sin\theta\cos\theta\cot\theta\quad=\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\quad=\cos^2\theta$$

$$\therefore\quad f'(\theta)=\frac{d}{dx}\left(\cos^2\theta\right)\quad=2\cos\theta\frac{d}{dx}\cos\theta\quad=2\cos\theta(-\sin\theta)$$

$$=-2\sin\theta\cos\theta\quad=-2\sin 2\theta$$

ดังนั้น $\quad f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{4}=-2(1)=-2$

4.3.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ให้ $y=\sin 4x$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน มี 6 สูตร

1. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}u=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}u=\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}u=\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}u=\dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ 6. $\frac{d}{dx}\cos ec^{-1}u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

หมายเหตุ กำหนดให้ $\sin^{-1}u = \arcsin u$, $\cos^{-1}u = \arccos u$,

$\tan^{-1}u = \arctan u$, $\cot^{-1}u = \text{arc}\cot u$,

$\sec^{-1}u = \text{arc}\sec u$, $\cos ec^{-1}u = \text{arccosec}\, u$

ตัวอย่างที่ 4.22 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \arcsin\left(\cos\sqrt{x}\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\arcsin\left(\cos\sqrt{x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\sqrt{x}}}\frac{d}{dx}\cos\sqrt{x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\sqrt{x}}}\frac{d}{dx}\cos\sqrt{x} \\
&= \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right) \\
&= \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\left(\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.23 จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^2\cos^{-1}(\sin x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[x^2\cos^{-1}(\sin x)\right] \\
&= x^2\frac{d}{dx}\cos^{-1}(\sin x) + \cos^{-1}(\sin x)\frac{dx^2}{dx} \\
&= \frac{-x^2}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\frac{d}{dx}\sin x + 2x\cos^{-1}(\sin x) \\
&= \frac{-x^2}{\cos x}(\cos x) + 2x\cos^{-1}(\sin x) \\
&= -x^2 + 2x\cos^{-1}(\sin x) \quad = x\left[2\cos^{-1}(\sin x) - x\right]
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.24 จงหาอนุพันธ์ของ $y = e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \\
&= e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{d}{dx} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \frac{d}{dx} x^{-1} \\
&= \left(\frac{x^2 e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}}{1+x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad = \frac{e^{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 4.25 ให้ $s = \sin(\arctan t)$ จงหา $\frac{ds}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \frac{d}{dt}[\sin(\arctan t)] \\
&= \cos(\arctan t) \frac{d}{dt} \arctan t \\
&= \cos(\arctan t)\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{dt} \\
&= \frac{\cos(\arctan t)}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

หา $\frac{ds}{dt}$ เมื่อ $t = 1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{ds}{dt} &= \frac{\cos(\arctan(1))}{1+1^2} \quad = \frac{\cos\left(\pi/4\right)}{1+1} \\
&= \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

4.3.6 การหาอนุพันธ์เชิงลอการิทึม

การหาอนุพันธ์เชิงลอการิทึม เหมาะสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของผลคูณ ผลหารและเลขยกกำลัง ซึ่งฟังก์ชันในลักษณะดังกล่าว ถ้าใส่ลอการิทึมเข้าไปทั้ง 2 ข้างของสมการ แล้วใช้สมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึมก่อนทำการหาอนุพันธ์ ทำให้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านั้นง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.26 จงหาอนุพันธ์ของ $y = x^2(x-5)^3\sqrt{3-x}$

วิธีทำ

จาก $$y = x^2(x-5)^3\sqrt{3-x}$$

$$\ln(y) = \ln\left[x^2(x-5)^3\sqrt{3-x}\right]$$

$$\ln(y) = \ln x^2 + \ln(x-5)^3 + \ln\sqrt{3-x}$$

$$\ln(y) = 2\ln x + 3\ln(x-5) + \frac{1}{2}\ln(3-x)$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\left[2\ln x + 3\ln(x-5) + \frac{1}{2}\ln(3-x)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\ln x + 3\frac{d}{dx}\ln(x-5) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(3-x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\frac{dx}{dx} + \left(\frac{3}{x-5}\right)\frac{d}{dx}(x-5) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-x}\right)\frac{d}{dx}(3-x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \left(\frac{3}{x-5}\right)\frac{dx}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-x}\right)\frac{-dx}{dx}$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2}{x} + \frac{3}{x-5} + \frac{-1}{2(3-x)}\right]$$

$$= \left(x^2(x-5)^3\sqrt{3-x}\right)\left[\frac{2}{x} + \frac{3}{x-5} - \frac{1}{2(3-x)}\right]$$

ตัวอย่างที่ 4.27 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2+6}}{\sqrt{x^2-8}}$

วิธีทำ

จาก $$y = \frac{x\sqrt[3]{x^2+6}}{\sqrt{x^2-8}}$$

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{x\sqrt[3]{x^2+6}}{\sqrt{x^2-8}}\right)$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \ln\sqrt[3]{x^2+6} - \ln\sqrt{x^2-8}$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \frac{1}{3}\ln(x^2+6) - \frac{1}{2}\ln(x^2-8)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\ln(x) + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\ln(x^2+6) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(x^2-8)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right) + \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+6}\right)\frac{d}{dx}(x^2+6) - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-8}\right)\frac{d}{dx}(x^2-8)$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+6)} - \frac{2x}{2(x^2-8)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt[3]{x^2+6}}{\sqrt{x^2-8}}\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+6)} - \frac{2x}{x^2-8}\right]$$

ตัวอย่างที่ 4.28 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{\ln x}{x^2\sqrt{\arccos x}}$

วิธีทำ

จาก $$y = \frac{\ln x}{x^2\sqrt{\arccos x}}$$

$$\ln(y) = \ln\frac{\ln x}{x^2\sqrt{\arccos x}}$$

$$\ln(y) = \ln(\ln x) - \ln(x^2) - \ln\left(\sqrt{\arccos x}\right)$$

$$\ln(y) = \ln(\ln x) - 2\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(\arccos x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left[\ln(\ln x) - 2\ln x - \frac{1}{2}\ln\arccos x\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\ln x) - 2\frac{d}{dx}\ln x - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\arccos x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}\ln x\right) - \left(\frac{2}{x}\frac{dx}{dx}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\arccos x}\right)\frac{d}{dx}\arccos x$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{x\ln x} - \frac{2}{x} - \left(\frac{1}{2\arccos x}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\ln x}{x^2\sqrt{\arccos x}}\right)\left[\frac{1}{x\ln x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)}\right]$$

4.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของ u หรือ $y=f(u)$ และ u เป็นฟังก์ชันของ x หรือ $u=g(x)$ สามารถสร้างให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ได้ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันประกอบ ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $y=f(u)$ และ $u=g(x)$ สามารถหา $\frac{dy}{dx}$ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.329 ให้ $y=f(u)=3u^2-2u+1$ และ $u=g(x)=x-2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

หาฟังก์ชันประกอบ $y=(f\circ g)(x)=f[g(x)]$

$$=f(x-2) \quad =3(x-2)^2-2(x-2)+1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3\frac{d}{dx}(x-2)^2-2\frac{d}{dx}(x-2)+\frac{d}{dx}(1)$$

$$=6(x-2)-2=6x-14$$

4.4.1 กฎลูกโซ่

ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชัน $y=f(u)$ และ $u=g(x)$ มาให้ ไม่จำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันประกอบก่อน สามารถหา $\frac{dy}{dx}$ โดยการใช้กฎลูกโซ่ ดังนี้

ถ้า $y=f(u)$ มีอนุพันธ์ที่ u และ $u=g(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x สามารถหาได้อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{4.3}$$

และกฎลูกโซ่สำหรับหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ t คือ

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{4.4}$$

ตัวอย่างที่ 4.30 กำหนดให้ $y=2u^2-3u-4$ และ $u=x^2+1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

จาก $\quad y=2u^2-3u-4$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(2u^2-3u-4)=4u-3$$

จาก $\quad u=x^2+1$

$\therefore \quad \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+1)=2x$

กฎลูกโซ่ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad =(4u-3)(2x)$

แทนค่า $u=(x^2+1)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\left[4(x^2+1)-3\right](2x) \quad =2x(4x^2+1)$$

ตัวอย่างที่ 4.31 กำหนดให้ $y=3u^3-u^2+7u-2$ และ $u=3x-2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=\frac{1}{3}$

วิธีทำ

จาก $\quad y=3u^3-u^2+7u-2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(3u^3-u^2+7u-2)=9u^2-2u+7$$

จาก $\quad u=3x-2$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(3x-2)=3$$

กฎลูกโซ่ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad =3(9u^2-2u+7)=27u^2-6u+21$

$$=27(3x-2)^2-6(3x-2)+21$$

หา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x=\frac{1}{3}$ จะได้

$$\frac{dy}{dx}=27(1-2)^2-6(1-2)+21$$

$$=27(1)-6(-1)+21 \quad =27+6+21=54$$

ตัวอย่างที่ 4.32 กำหนดให้ $y=2u^2+1$, $u=3x^2$ และ $x=2t+t^3$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

วิธีทำ

จาก $\quad y=2u^2+1$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(2u^2+1)=4u$$

จาก $\quad u=3x^2$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(3x^2)=6x$$

จาก $x = 2t + t^3$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t + t^3\right) = 2 + 3t^2$$

กฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$

$$= (4u)(6x)\left(2+3t^2\right) = \left[4\left(3x^2\right)\right](6x)\left(2+3t^2\right)$$

$$= 72x^3\left(2+3t^2\right) = 72\left(2t+t^3\right)^3\left(2+3t^2\right)$$

$$= 72t^3\left(2+t^2\right)^3\left(2+3t^2\right)$$

4.5 อนุพันธ์โดยปริยาย

โดยทั่วไปการเขียนสมการของฟังก์ชันมีรูปแบบการเขียนแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ

4.5.1 ฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง

ฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง คือ ฟังก์ชันที่สมการมีตัวแปรตัวหนึ่ง (ตัวแปรตาม) เขียนอยู่ในรูปตัวแปรอื่น ๆ (ตัวแปรอิสระ) เช่น

$$y = 2x + 5 \qquad y = \sqrt{x^2 - 3}$$

$$y = 3x^5 + 3x^3 - 7 \qquad y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 9$$

สมการดังกล่าวเขียนอยู่ในรูป $y = 2x + 5$ และเรียก y ว่า เป็นฟังก์ชันโดยชัดแจ้งของ x

4.5.2 ฟังก์ชันโดยปริยาย

ฟังก์ชันโดยปริยาย คือ ฟังก์ชันที่สมการมีตัวแปรหลายตัวเขียนรวมกันอยู่ โดยไม่ได้แยกตัวแปรตัวหนึ่ง (ตัวแปรตาม) เขียนอยู่ในรูปตัวแปรอื่น ๆ (ตัวแปรอิสระ) เช่น

$x^2 + xy + y^2 = 0$, $y^2 2xy - x^2 = 0$, $3x^3y + x^2y^2 + 4xy^3 = 0$ และ $\sqrt{xy} - xy^2 + x\sqrt{y} = 0$

สมการดังกล่าวเขียนในรูป $f(x,y) = 0$ และเรียก y ว่าเป็นฟังก์ชันโดยปริยายของ x การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อก่อน ต่อไปนี้เป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ขอให้ศึกษาวิธีการตามตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.33 กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 2xy + 3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

จาก $x^2 + y^2 = 2xy + 3$

อนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้ $\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(2xy+3)$

$$\frac{dx^2}{dx}+\frac{dy^2}{dx}=2\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(3)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+0$$

จัดรูป $$2x+2y\frac{dy}{dx}=2x\frac{dy}{dx}+2y$$

$$2y\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}=2y-2x$$

$$(2y-2x)\frac{dy}{dx}=2y-2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=1$$

ตัวอย่างที่ 4.34 กำหนดให้ $x+xy+y^2=7$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(1,2)$

วิธีทำ

จาก $x+xy+y^2=7$

อนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้ $\frac{d}{dx}(x+xy+y^2)=\frac{d}{dx}(7)$

จัดรูป $$1+\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(1+y)+(x+2y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x+2y)\frac{dy}{dx}=-(1+y)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1+y}{x+2y}$$

หาค่า $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(1,2)$ คือ แทนค่า $x=1$ และ $y=2$ จะได้

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1+2}{1+4}=-\frac{3}{5}$$

ตัวอย่างที่ 4.35 กำหนดให้ $y\sin x-xe^{2y}=0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

จาก $y\sin x-xe^{2y}=0$

อนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left(y\sin x - xe^{2y}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}y\sin x - \frac{d}{dx}xe^{2y} = 0$$

$$y\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{dy}{dx} - \left(x\frac{d}{dx}e^{2y} + e^{2y}\frac{dx}{dx}\right) = 0$$

$$y\cos x + \sin x\frac{dy}{dx} - \left(2xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y}\right) = 0$$

$$y\cos x + \sin x\frac{dy}{dx} - 2xe^{2y}\frac{dy}{dx} - e^{2y} = 0$$

$$\left(\sin x - 2xe^{2y}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(y\cos x - e^{2y}\right)$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(y\cos x - e^{2y}\right)}{\sin x - 2xe^{2y}}$$

ตัวอย่างที่ 4.36 กำหนดให้ $ye^{x} + x^{3}\ln y = xy + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(0,1)$

วิธีทำ

จาก $ye^{x} + x^{3}\ln y = xy + 1$

อนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{3}\ln y\right) = \frac{d}{dx}(xy) + 0$$

$$\left(y\frac{d}{dx}e^{x} + e^{x}\frac{d}{dx}y\right) + \left(x^{3}\frac{d}{dx}\ln y + \ln y\frac{d}{dx}x^{3}\right) = x\frac{dy}{dx} + x\frac{dx}{dx}$$

$$ye^{x} + e^{x}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x^{3}}{y}\right)\frac{dy}{dx} + 3x^{2}\ln y = x\frac{dy}{dx} + x$$

$$\left(e^{x} + \frac{x^{3}}{y} - x\right)\frac{dy}{dx} = x - ye^{x} - 3x^{2}\ln y$$

$$\left(\frac{ye^{x} + x^{3} - xy}{y}\right)\frac{dy}{dx} = x - ye^{x} - 3x^{2}\ln y$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y\left(x - ye^{x} - 3x^{2}\ln y\right)}{ye^{x} + x^{3} - xy}$$

หาค่า $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $(0,1)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)\left[0 - (1)(1) - 3(0)(0)\right]}{(1)(1) + 0 - (0)(1)} = \frac{(1)(-1)}{(1)} = -1$$

NPRU

4.6 อนุพันธ์อันดับสูง

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ หรือ $f'(x)$ ก็เป็นฟังก์ชันด้วย ถ้านำ $f'(x)$ ไปหาอนุพันธ์ต่อ ผลลัพธ์ที่ได้เรียกว่า อนุพันธ์อันดับสองของ f ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f''(x)$ ในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ของ $f''(x)$ เรียกว่า อนุพันธ์อันดับสามของ f ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'''(x)$ และถ้านำไปหาอนุพันธ์ต่อไปอีกจะได้อนุพันธ์อันดับสูงขึ้นเรื่อย ๆ นั่นคือ ดังแสดงในตารางที่ 4.1 แสดงให้เห็นถึงสัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับสูงต่าง ๆ เมื่อกำหนดให้ $y = f(x)$

ให้ $$y = f(x)$$

$$y' = \frac{d}{dx} f(x) \tag{4.5}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \tag{4.6}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right] = \frac{d^3}{dx^3} f(x) \tag{4.7}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

ตารางที่ 4.1 สัญลักษณ์ของอนุพันธ์อันดับสูง

อนุพันธ์	สัญลักษณ์			
อันดับ 1	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx} f(x)$
อันดับ 2	y''	f''	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2} f(x)$
อันดับ 3	y'''	f'''	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3y}{dx^3} f(x)$
อันดับ 4	$y^{(4)}$	$f^{(4)}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4y}{dx^4} f(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
อันดับ n	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^ny}{dx^n} f(x)$

ตัวอย่างที่ 4.37 กำหนดให้ $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ จงหา y', y'', y''' และ $y^{(4)}$

วิธีทำ

จาก $$y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5\right) = 6x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(6x^2 - 6x + 4\right) = 12x - 6$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(12x - 6) = 12$$

$$y^{(4)} = \frac{d}{dx}(12) = 0$$

ตัวอย่างที่ 4.38 กำหนดให้ $f(x) = x\sin x + x$ จงหา $f^{(4)}(x)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = x\sin x + x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x\sin x + \frac{dx}{dx} = \left(x\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\right) + 1 = x\cos x + \sin x + 1$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}x\cos x + \frac{d}{dx}\sin x + \frac{d1}{dx}$$

$$= \left(x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\right) + \cos x + 0 = -x\sin x + 2\cos x$$

$$f'''(x) = -\frac{d}{dx}x\sin x + 2\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= -\left(-x\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\right) - 2\sin x = -(x\cos x + \sin x) - 2\sin x$$

$$= -x\cos x - \sin x - 2\sin x = -x\cos x - 3\sin x$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{d}{dx}x\cos x - 3\frac{d}{dx}\sin x$$

$$= -\left(x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\right) - 3\cos x = -(-x\sin x + \cos x) - 3\cos x$$

$$= x\sin x - \cos x - 3\cos x = x\sin x - 4\cos x$$

ตัวอย่างที่ 4.39 กำหนดให้ $y\left(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x\right) = xy + 5$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ

จาก $y\left(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x\right) = xy + 5$

$$\frac{d}{dx}y\left(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x\right) = \frac{d}{dx}(xy + 5)$$

$$y\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x\right) + \left(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x\right)\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx} + y$$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\right)\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}+y$$

$$0+\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\right)\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)\frac{dy}{dx}=y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)^2}\left[\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)\frac{dy}{dx}-y\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)^2}\left[\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)\frac{dy}{dx}-y\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)^2}\left[\frac{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)y}{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)}-y(0-1)\right]$$

$$=\frac{1}{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)^2}(y+y)=\frac{2y}{\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x-x\right)^2}$$

ตัวอย่างที่ 4.40 กำหนดให้ $y=xe^{2x}$ จงหา $y^{(n)}$

วิธีทำ

จาก $\quad y'=\frac{d}{dx}xe^{2x} \quad =x\frac{d}{dx}e^{2x}+e^{2x}=2xe^{2x}+e^{2x}=2^1xe^{2x}+\left(1\times 2^0\right)e^{2x}$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(2xe^{2x}\right)+\frac{d}{dx}e^{2x} \quad =2x\frac{d}{dx}e^{2x}+e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)+2e^{2x}$$

$$=4xe^{2x}+2e^{2x}+2e^{2x}=4xe^{2x}+4e^{2x}=2^2xe^{2x}+\left(2\times 2^1\right)e^{2x}$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(4xe^{2x}\right)+4\frac{d}{dx}e^{2x} \quad =4x\frac{d}{dx}e^{2x}+e^{2x}\frac{d}{dx}(4x)+8e^{2x}$$

$$=8xe^{2x}+4e^{2x}+8e^{2x}=8xe^{2x}+12xe^{2x}=2^3xe^{2x}+\left(3\times 2^2\right)e^{2x}$$

$$y^{(4)}=\frac{d}{dx}\left(8xe^{2x}\right)+12\frac{d}{dx}e^{2x} \quad =8x\frac{d}{dx}e^{2x}+e^{2x}\frac{d}{dx}(8x)+24e^{2x}$$

$$=16xe^{2x}+8e^{2x}+24e^{2x}=16xe^{2x}+32xe^{2x}=2^4xe^{2x}+\left(4\times 2^3\right)e^{2x}$$

$$\vdots$$

ดังนั้น $\quad y^{(n)}=2^nxe^{2x}+n(2)^{n-1}\cdot e^{2x}$

4.7 กฎของโลปิตาล

กฎของโลปิตาล สามารถนำมาใช้หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ที่มีปัญหาเกี่ยวกับตัวเลขที่ยังไม่ได้กำหนดค่า $\left(\frac{0}{0}\right)$ หรือ $\left(\pm\frac{\infty}{\infty}\right)$ ซึ่งได้ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาลิมิตของฟังก์ชันทั้ง 2 รูปแบบนี้ในบทที่ 3 กฎของโลปิตาลเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

4.7.1 กฎโลปิตาล

ให้ f, g เป็นฟังก์ชัน และ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

หรือ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ แล้ว

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.8}$$

ตัวอย่างที่ 4.41 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{(-2)^3+8}{-2+2}=\frac{-8+8}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{d}{dx}(x^3+8)}{\frac{d}{dx}(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}3x^2$$

$$=3(-2)^2=3(4)=12$$

ตัวอย่างที่ 4.42 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}=\frac{1-e^{-x}}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-e^{-x})}{\frac{d}{dx}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{\cos x}=\frac{e^{-x}}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

ตัวอย่างที่ 4.43 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{e^0-e^0-0}{0-\sin 0}=\frac{1-1-0}{0-0}=\frac{0}{0}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^x-e^{-x}-2x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x-\sin x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{e^0-e^0-2}{1-\cos 0}=\frac{1+1-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^x-e^{-x}-2x\right)}{\frac{d}{dx}\left(1-\cos x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^0-e^0}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^x-e^{-x}\right)}{\frac{d}{dx}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{e^0+e^0}{\cos 0}=\frac{1+1}{1}=2$$

ตัวอย่างที่ 4.44 จงหาค่า $\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{e^{2x}}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{e^{2x}}=\frac{\infty\cdot\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln x}{2e^{2x}}=\frac{1+\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(1+\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(2e^{2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{4e^{2x}}\right)=\left(\frac{1}{\infty}\right)\left(\frac{1}{\infty}\right)=0\cdot 0=0$$

4.7.2 การหาค่าลิมิตเกี่ยวกับปัญหารูปแบบของตัวเลขที่ยังไม่ได้กำหนดค่าอื่น ๆ

รูปแบบของตัวเลขที่ยังไม่ได้กำหนดค่า นอกจากรูปแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งได้ศึกษามาแล้ว ยังมีรูปแบบอื่น ๆ อีก 5 รูปแบบ นั่นคือ มีรูปแบบของตัวเลขที่ยังไม่ได้กำหนดค่าอยู่ทั้งหมด 7 รูปแบบ คือ

$$\frac{0}{0},\pm\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,0^0,\infty^0 \text{ และ } 1^\infty$$

NPRU

การหาค่าลิมิตเกี่ยวกับปัญหารูปแบบของตัวเลขที่ยังไม่ได้กำหนดค่าทั้ง 5 แบบที่เหลือ มีหลักเกณฑ์ดังนี้ คือ

4.7.2.1 รูปแบบ $0\cdot\infty$ หรือ $\infty-\infty$

ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันใด ๆ ถ้าพบปัญหาเกี่ยวกับรูปแบบ $0\cdot\infty$ หรือ $\infty-\infty$ ให้ใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น บวก ลบ คูณ หาร ฯลฯ เปลี่ยนฟังก์ชันของโจทย์ให้อยู่ในรูปเศษส่วนก่อน ซึ่งทำให้รูปแบบ $0\cdot\infty$ หรือ $\infty-\infty$ เปลี่ยนไปอยู่ในรูปแบบของ $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ ต่อจากนั้นจึงสามารถใช้กฎของโลปิตาลแก้ปัญหาได้

ตัวอย่างที่ 4.45 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\tan\frac{\pi}{2}\right] = 0\cdot\infty$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}\left[(1-x)\tan\frac{\pi}{2}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(1-x)}{\frac{d}{dx}\cot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}$$

$$= \frac{-1}{\pi\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi(1)} = \frac{2}{\pi}$$

ตัวอย่างที่ 4.46 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \infty\left(e^0-1\right) = \infty(1-1) = \infty\cdot 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

ตัวอย่างที่ 4.47 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\infty-\infty$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-2x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2}{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{4}-2}{0}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2\right)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x^3\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}\right)\Big/\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\infty\sqrt{4}}=\frac{1}{\infty}=0$$

4.7.2.2 รูปแบบ $0^0, \infty^0$ และ 1^∞

ในการแก้ปัญหาลิมิตของฟังก์ชันที่มีรูปแบบ $[f(x)]^{g(x)}$ มักประสบปัญหาเกี่ยวกับรูปแบบของตัวเลขที่ยังไม่ได้กำหนดค่า $0^0, \infty^0$ และ 1^∞ เสมอ กรณีเช่นนี้ต้องใช้ลอการิทึมเข้ามาช่วยแปลงรูปแบบของฟังก์ชัน ดังนี้

ให้ $\quad y=[f(x)]^{g(x)}$

$$\ln(y)=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln[f(x)]$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}(\ln y)=\lim_{x\to a}g(x)\ln[f(x)]$$

$$\ln\left[\lim_{x\to a}y\right]=\lim_{x\to a}g(x)\ln[f(x)]$$

ดังนั้น $\quad \lim\limits_{x\to a}y=e^{\left[\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)\right]}$

$$=e^k$$

ถ้า $[f(x)]^{g(x)}$ จะได้ $\quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^k \quad$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ตัวอย่างที่ 4.48 จงหาค่า $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 0^0$$

ให้ $y = x^{\sin x}$

คูณด้วย ln ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\ln(y) = \ln\left(x^{\sin x}\right) = (\sin x)(\ln x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x)(\ln x)$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = -\frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x\tan x}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\frac{d}{dx}\sin x\tan x}{\frac{dx}{dx}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\sin x\sec^2 x - \tan x\cos x\right) = 0$$

$$\therefore \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0$$

คูณด้วย e ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $\lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 1$

ตัวอย่างที่ 4.49 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

วิธีทำ

ลองหาลิมิต $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$

กำหนดให้ $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

คูณด้วย ln ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\ln(y) = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(\cos x)}{dx^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\right)\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x} = \frac{0}{0}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(-\tan x)}{\frac{d}{dx}(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sec^2 x}{2}\right)=\left(\frac{-\sec^2 0}{2}\right)=\frac{-1}{2}$$

$\therefore \quad \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=-\frac{1}{2}$

คูณด้วย e ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $\lim_{x\to 0} y=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

ตัวอย่างที่ 4.50 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}(\cot x)^x$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0}(\cot x)^x=\infty^0$$

ให้ $y=(\cot x)^x$ คูณด้วย ln ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\ln(y)=\ln(\cot x)^x=x\ln(\cot x)$$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(\ln y)=\lim_{x\to 0} x\ln(\cot x)$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cot x)}{x^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

ใช้โลปิตาล $=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(\cot x)}{\frac{d}{dx}x^{-1}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cos ec^2 x}{\cot x}\right)\left(\frac{1}{-x^{-2}}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\tan x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

ลองหาลิมิต $=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\cos x}$ จะได้ $=\frac{0}{0}$

ใช้โลปิตาลอีกครั้ง $\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}x^2}{\frac{d}{dx}\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-\sin^2 x+\cos^2 x}$

$\therefore \quad \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=\frac{0}{0+1}=0$

คูณด้วย e ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $\lim_{x\to 0} y=e^0=1$

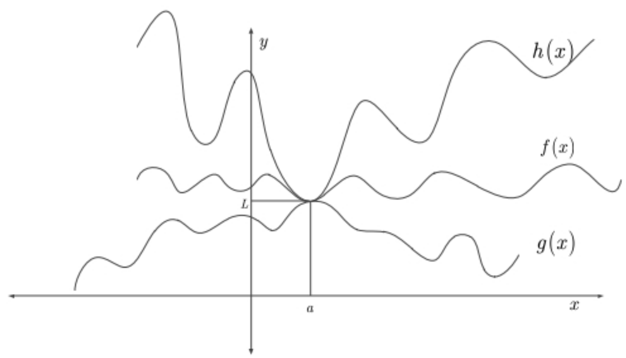
ดังนั้น $\lim_{x\to 0}(\cot x)^x=1$

4.7.3 ทฤษฎีลิมิตแบบสควีซ

ทฤษฎีการหาค่าลิมิตแบบสควีซ (Squeeze theorem) ใช้ในการหาค่าลิมิตขั้นสูง โดยกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ $g(x)$ และ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ซึ่ง $g(x) \le f(x) \le h(x)$ เป็นเงื่อนไขของทั้งสามฟังก์ชันนี้ ถ้าสมมติให้โดเมนของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าอยู่ระหว่างฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ ดังแสดงในภาพที่ 4.2 แล้ว เมื่อ $\lim_{x \to a} g(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} h(x) = L$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to a} g(x) \le \lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} h(x) \text{ สำหรับทุกค่าของ } a \le x \le b \qquad (4.9)$$

ถ้า $L \le \lim_{x \to a} f(x) \le L$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$



ภาพที่ 4.2 การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้วยวิธีสควีซ

ตัวอย่างที่ 4.51 ถ้ากำหนดให้ $3x \le f(x) \le x^2 + 2$ สำหรับ $0 \le x \le 2$ จงหาค่า $\lim_{x \to 1} f(x)$

วิธีทำ

พิจารณา หาลิมิตด้านซ้าย $\lim_{x \to 1} (3x) = 3(1) = 3$

หาลิมิตด้านขวา $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2) = (1^2 + 2) = 3$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} (3x) \le \lim_{x \to 1} f(x) \le \lim_{x \to 1} (x^2 + 2)$

ซึ่ง จะได้ว่า $3 \le \lim_{x \to 1} f(x) \le 3$

สรุปได้ว่า $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

ตัวอย่างที่ 4.52 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right)$

วิธีทำ

ลองหาค่าลิมิตจากโจทย์ จะได้ $\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right) = \left(0^2 \cos \frac{1}{0^2}\right) = 0.\cos\left(\frac{1}{0}\right) = 0.\infty$

จากโจทย์ กำหนดให้ $f(x) = \left(x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right)$

ให้นำพจน์ $\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)$ มาพิจารณา จะได้ว่า เนื่องจากฟังก์ชันของ $\cos(x)$ มีค่าเรนจ์อยู่ระหว่าง -1 และ 1 เท่านั้น ดังนั้น

$$-1 \le \left(\cos \frac{1}{x^2}\right) \le 1$$

คูณด้วย x^2 จะได้ $$-1\left(x^2\right) \le x^2\left(\cos \frac{1}{x^2}\right) \le 1\left(x^2\right)$$

แล้วหาค่าลิมิต $\lim_{x\to 0}$ จะได้

$$\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) \le \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)\right] \le \lim_{x\to 0}\left(x^2\right)$$

$$\left(0^2\right) \le \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)\right] \le \left(0^2\right)$$

$$0 \le \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(\cos \frac{1}{x^2}\right)\right] \le 0$$

สรุปได้ว่า $\lim_{x\to 0}\left(x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right) = 0$

ตัวอย่างที่ 4.53 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$ โดยกำหนดให้ $4 \le f(x) \le x^2 + 6x - 3$ สำหรับทุกค่าของ x

วิธีทำ

จาก $$4 \le f(x) \le x^2 + 6x - 3$$

ให้หาค่าลิมิต $\lim_{x\to 1}$ จะได้

$$\lim_{x\to 1}(4) \le \lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1}\left(x^2 + 6x - 3\right)$$

$$4 \le \lim_{x\to 1} f(x) \le \left(1^2 + 6(1) - 3\right)$$

$$4 \le \lim_{x\to 1} f(x) \le 4$$

สรุปได้ว่า $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

ตัวอย่างที่ 4.54 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(x^4 \sin \frac{3}{x}\right)$

วิธีทำ

ลองหาค่าลิมิตจากโจทย์ จะได้ $\lim_{x\to 0}\left(x^4 \sin \frac{3}{x}\right) = \left(0^4 \sin \frac{3}{0}\right) = 0.\sin\left(\frac{3}{0}\right) = 0.\infty$

จากโจทย์ กำหนดให้ $f(x)=\left(x^4 \sin \frac{3}{x}\right)$

ให้นำพจน์ $\left(\sin \frac{3}{x}\right)$ มาพิจารณา จะได้ว่า เนื่องจากฟังก์ชันของ $\sin(x)$ มีค่าเรนจ์อยู่ระหว่าง -1 และ 1 เท่านั้น ดังนั้น

$$-1 \le \left(\sin \frac{3}{x}\right) \le 1 \qquad \text{สำหรับทุกค่าของ } x$$

คูณด้วย x^4 จะได้ $\quad -1\left(x^4\right) \le x^4\left(\sin \frac{3}{x}\right) \le 1\left(x^4\right)$

แล้วหาค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to 0}$ จะได้

$$\lim_{x\to 0}\left(-x^4\right) \le \lim_{x\to 0}\left[x^4\left(\sin \frac{3}{x}\right)\right] \le \lim_{x\to 0}\left(x^4\right)$$

$$\left(0^4\right) \le \lim_{x\to 0}\left[x^4\left(\sin \frac{3}{x}\right)\right] \le \left(0^4\right)$$

$$0 \le \lim_{x\to 0}\left[x^4\left(\sin \frac{3}{x}\right)\right] \le 0$$

สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4 \sin \frac{3}{x}\right)=0$

4.8 การประยุกต์ใช้อนุพันธ์

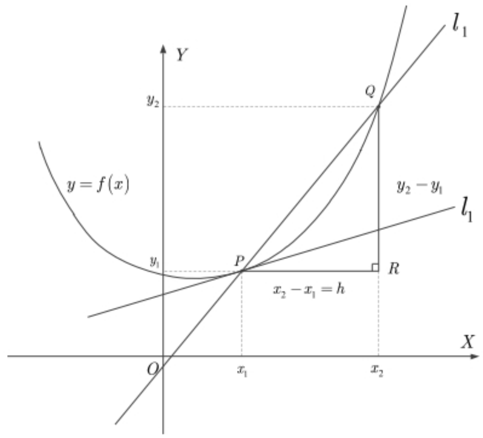
สามารถนำอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้งานได้มากมาย อาทิเช่น การหาค่าเส้นสัมผัสกราฟ การหาค่าจุดตัดกราฟ การหาค่าความชันของกราฟ ณ จุดใด ๆ ใช้อนุพันธ์ในการพิจารณาฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ใช้อนุพันธ์ในการหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชัน การหาค่าความเร็วและความเร่งของวัตถุเคลื่อนที่ การหาอัตราสัมพัทธ์ ในหัวข้อนี้ได้แสดงวิธีการนำอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้งานตามลำดับหัวข้อข้างต้น

4.8.1 จุดสัมผัสกราฟ เส้นสัมผัสกราฟและความชันของกราฟที่จุดใด ๆ

จากภาพที่ 4.3 ถ้าเลื่อน Q เข้าใกล้ P ตามแนวกราฟ จะทำให้ระยะ h มีค่าเข้าใกล้ 0 เส้นตัดกราฟ PQ จะ จะหมุนเข้าหาเส้นสัมผัสกราฟ L ทำให้ความชันของเส้นตัดกราฟ PQ มีค่าเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ L

$$\text{ความชันของ } L=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=f'(x_1) \qquad (4.10)$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ความชันกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด (x_1,y_1) หรือความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด (x_1,y_1) หาได้จาก อนุพันธ์อันดับ 1 ของ P ที่ x_1 หรือ $f'(x_1)$ นั่นเอง



ภาพที่ 4.3 กราฟแสดงการหาค่าความชัน ณ จุดใด ๆ ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4.55 จงหาความชันของกราฟ $y = \frac{3}{2-5x}$ ที่จุด $(1,-1)$

วิธีทำ

จาก $\quad y = \frac{3}{2-5x}$

$\therefore \quad y' = 3\frac{d}{dx}(2-5x)^{-1}$

$= -3(2-5x)^{-2}\frac{d}{dx}(2-5x) \quad = \frac{15}{(2-5x)^2}$

ความชันของกราฟที่จุดใด ๆ $y' = \frac{15}{(2-5x)^2}$

ความชันที่จุด $(1,-1)$ $= \frac{15}{(2-5)^2} \quad = \frac{15}{9} \quad = \frac{5}{3}$

ตัวอย่างที่ 4.56 จงหาความชันของกราฟ $y = \cos^2(x) + \arccos(x)$ ที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ

จาก $\quad y = \cos^2(x) + \arccos(x)$

$\therefore \quad y' = \frac{d}{dx}\cos^2(x) + \frac{d}{dx}\arccos(x)$

$$= -2\cos x \sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ความชันของกราฟที่จุดใด ๆ $y' = \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore$ ความชันของกราฟที่จุด $(0,0)$ $= \sin(0) - \frac{1}{\sqrt{1-0}} \quad = 0 - 1 = -1$

จากการหาความชันของกราฟ ณ จุดใด ๆ ได้แล้วสามารถหาสมการเส้นสัมผัสกราฟได้จากสมการที่ (4.11) และสามารถหาจุดสัมผัสกราฟเมื่อทราบความชันของกราฟเท่ากับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของกราฟ ณ จุดนั้น ๆ

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \tag{4.11}$$

ตัวอย่างที่ 4.57 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = \ln(x^3 - 2) + \frac{1}{x}$ ที่จุด $(2,-1)$

วิธีทำ

จาก $\quad y = \ln(x^3 - 2) + \frac{1}{x}$

$\therefore \quad y' = \frac{d}{dx}\ln(x^3 - 2) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \left(\frac{1}{x^3 - 2}\right)\frac{d}{dx}(x^3 - 2) - \frac{1}{x^2} \quad = \frac{3x^2}{x^3 - 2} - \frac{1}{x^2}$$

ความชันของกราฟที่จุดใด ๆ $y' = \frac{3x^2}{x^3 - 2} - \frac{1}{x^2}$

$\therefore$ ความชันของจุดกราฟที่จุด $(2,-1)$ คือ $y' = \frac{3(2^2)}{(2^3) - 2} - \frac{1}{(2^2)} \quad = \frac{12}{6} - \frac{1}{4} \quad = \frac{7}{4}$

จากสมการเส้นตรง $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

แทนค่า $m = \frac{7}{4}$ และ $(x_1, y_1) = (2,-1)$ จะได้

ดังนั้น เส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(2,-1)$ คือ

$$(y - (-1)) = \frac{7}{4}(x - 2)$$

$$4(y + 1) = 7x - 14$$

$$4y + 4 = 7x - 14$$

$$7x - 4y - 18 = 0$$

NPRU

ตัวอย่างที่ 4.58 กำหนดให้ $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x$ จงหาจุดสัมผัสและเส้นสัมผัสกราฟที่มีความชันจุดสัมผัสเท่ากับ 2

วิธีทำ

จาก $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x$

$\therefore \quad y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}-x^2-x\right)=x^2-2x-1$

ความชันของกราฟที่จุดใด ๆ $y'=x^2-2x-1$

กำหนดให้ ความชัน $m=2$

$\therefore \quad x^2-2x-1=2$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore \quad x=3,-1$

แทนค่า $x=3,-1$ ใน $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x$ จะได้

$y=-3,-\frac{1}{3}$

ดังนั้น ได้จุดสัมผัสกราฟคือ $(3,-3)$ และ $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

จากสมการของเส้นสัมผัส $y-y_1=m(x-x_1)$

สมการของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(3,-3)$ และ $m=2$ คือ

$y-(-3)=2(x-3)$

$y+3=2x-6$

$2x-y-9=0$

สมการของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ และ $m=2$ คือ

$y-\left(-\frac{1}{3}\right)=2[x-(-1)]$

$y+\frac{1}{3}=2(x+1)$

$3y+1=6(x+1)$

$3y+1=6x+6$

$6x-3y+5=0$

4.8.2 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ $f(x_1)<f(x_2)$ โดยที่ $a<x_1<x_2<b$ ทุก ๆ ค่าของ x_1 และ x_2

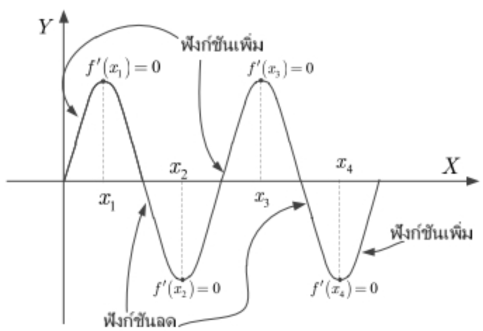
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันลดในช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ $f(x_1)>f(x_2)$ โดยที่ $a<x_1<x_2<b$ ทุก ๆ ค่าของ x_1 และ x_2

การพิจารณาฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดในช่วงปิดใด ๆ สามารถใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันช่วยในการพิจารณาได้ แสดงได้ดังภาพที่ 4.4 แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในช่วงปิดใด ๆ พิจารณาจากค่าอนุพันธ์ของ $f'(x)$ คือความชันของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ เมื่อแทนค่า x ใน $f'(x)$ ผลลัพธ์คือความชันของฟังก์ชันที่จุดนั้น ซึ่งสามารถพิจารณาจากค่าความชันนี้ มี 3 กรณีดังนี้

$f'(x)>0$ ความชันมีค่าเป็นบวกตลอดช่วงปิดใด ๆ แสดงว่าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ณ ช่วงปิดนั้น ๆ

$f'(x)<0$ ความชันมีค่าเป็นลบตลอดช่วงปิดใด ๆ แสดงว่าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด ณ ช่วงปิดนั้น ๆ

$f'(x)=0$ ความชันมีค่าเป็นศูนย์ตลอดช่วงปิดใด ๆ แสดงว่าฟังก์ชันมีจุดเปลี่ยนของฟังก์ชันที่จุดนั้น ๆ



ภาพที่ 4.4 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในช่วงปิดใด ๆ

ตัวอย่างที่ 4.59 ให้ $f(x)=x^3-12x+5$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดในช่วงใด

วิธีทำ

จาก $f(x)=x^3-12x+5$

$\therefore$ $f'(x)=\frac{d}{dx}(x^3-12x+5)$

$f'(x)=3x^2-12$

ให้ $f'(x)=0$ จะได้ $3x^2-12=0$ (หรือ $x^2=4$)

$x=-2,2$ ค่า $x=-2,2$ จะใช้เป็นค่าแบ่งช่วงสำหรับฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด สรุปได้ว่า

ช่วงของ x	ค่าของ $f'(x)$	ลักษณะของฟังก์ชัน f
$(-\infty,-2)$	$(+)$	เพิ่มขึ้น
-2	0	-
$(-2,2)$	(-1)	ลดลง
2	0	-
$(2,\infty)$	$(+)$	เพิ่มขึ้น

4.8.3 การหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ที่ $x=a$ ก็ต่อเมื่อ $f(a)\geq f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมน f (ตัวแปรอิสระของ f) และฟังก์ชัน f จะมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ที่ $x=a$ ก็ต่อเมื่อ $f(a)\leq f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมน f (ตัวแปรอิสระของ f) ซึ่งจากภาพที่ 4.6 ที่จุดเปลี่ยนกราฟหรือจุดสัมผัสกราฟที่มีความชันเป็นศูนย์นั้น สามารถนำมาพิจารณาหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชันได้ดังนี้

1. ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดหรือสูงสุด ที่ $x=a$ แล้ว $f'(a)=0$ หรือ $f'(a)=0$ หาค่าไม่ได้ (a คือค่าวิกฤต)

2. ถ้า $x=a$ อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f และ $f'(x)$ มีค่าเปลี่ยนจาก $(+)$ เป็น $(-)$ เมื่อแทนค่าเข้าใกล้ a จากทางด้านซ้ายไปด้านขวา แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(a)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(a,f(a))$ แต่ถ้า $f'(x)$ มีค่าเปลี่ยนจาก $(-)$ เป็น $(+)$ เมื่อแทนค่าเข้าใกล้ a จากทางด้านซ้ายไปด้านขวา แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(a)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(a,f(a))$

ตัวอย่างที่ 4.60 จงหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x)=2+12x+3x^2-2x^3$

วิธีทำ

1. หา $f'(x)$ จาก $f(x)=2+12x+3x^2-2x^3$

$$\therefore\ f'(x) = 12+6x-6x^2 = 6(2+x-x^2)$$
$$= -6(x^2-x-2) = -6(x-2)(x+1)$$

2. หาค่าวิกฤต คือทุกค่าของ x ที่ทำให้ $f'(x)=0$

จะได้ $-6(x-2)(x+1)=0$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$\therefore\quad x=2,-1$ (เป็นค่าวิกฤต)

3. นำค่าวิกฤตมาทดสอบหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

เมื่อ $x=2$ แทนค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้ายและทางขวา ลงใน $f'(x)$ จะได้

ถ้า $x<2$ แล้ว $f'(x)=(-)(-)(+)=(+)$

ถ้า $x>2$ แล้ว $f'(x)=(-)(+)(+)=(-)$

จะเห็นว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก $(+)$ ไปเป็น $(-)$

แสดงว่าได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $f(x)$ เมื่อ $x=2$

จะได้ $f(2) = 2+12(2)+3(2)^2-2(2)^3$

$$= 2+24+12-16 = 22$$

เมื่อ $x=-1$ แทนค่าเข้าใกล้ -1 ทางซ้ายและทางขวา ลงใน $f'(x)$ จะได้

ถ้า $x<-1$ แล้ว $f'(x)=(-)(-)(-)=(-)$

ถ้า $x>-1$ แล้ว $f'(x)=(-)(-)(+)=(+)$

จะเห็นว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก $(-)$ ไปเป็น $(+)$

แสดงว่าได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $f(x)$ เมื่อ $x=-1$

จะได้ $f(-1) = 2+12(-1)+3(-1)^2-2(-1)^3$

$$= 2-12+3+2 = -5$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x)=2+12x+3x^2-2x^3$ มี จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(2,22)$
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(-1,-5)$

NPRU

4.9 บทสรุป

นักศึกษาสามารถคำนวณหาค่าการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน สามารถคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ หาค่าอนุพันธ์จากนิยามและโดยการใช้สูตร หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ หาค่าอนุพันธ์โดยปริยาย หาค่าอนุพันธ์อันดับสูง หาค่าอนุพันธ์โดยใช้กฎของโลปิตาล การแก้ปัญหาค่าลิมิตในรูปแบบที่ยังไม่ได้กำหนดด้วยอนุพันธ์ และการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ เพื่อเป็นความรู้ฐานในการศึกษาขั้นสูงต่อไป

4.10 คำถามท้ายบท

1. แบบฝึกหัดหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$
3. $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$
4. $f(x)=x\sqrt{x}$
5. ให้ $f(x)=2x^4+3x^2+5$ จงหา $f'(0)$
6. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ จงหา $f'(1)$
7. ให้ $f(x)=\sqrt{x}-x$ จงหา $f'(4)$
8. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ จงหา $f'(-2)$

2. จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยต่อไปนี้

1. $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x$
2. $f(x)=2x^3-4x+3$
3. $f(x)=-5x^3+\dfrac{7}{2}x^2+9x-11$
4. $f(x)=\dfrac{4x^3+7x-4}{x}$
5. $y=4\sqrt{1-x^3}$
6. $y=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^5$
7. $y=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}$
8. $y=\dfrac{1}{\left(x^2-3x\right)^2}$
9. $y=(2x-1)(3x+4)(x+7)$
10. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$
11. $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$
12. $y=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

3. จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมต่อไปนี้

1. $y=\ln\left(2x^5+5\right)^3$
2. $y=\ln\left(3x^2+5x+3\right)^{\frac{2}{3}}$

3. $y=\log_2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$
4. $y=\sqrt{x}\log x^3$
5. $y=x\log x$
6. $y=\log x^4$
7. $y=\ln(\ln(\ln x))$
8. $y=t^2\ln t+t^3$
9. $y=\frac{1}{x+1}\ln(x+1)$
10. $y=x\ln(x\ln x)$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลังต่อไปนี้

1. $y=x^2e^{x^2}$
2. $y=\left(e^{x^2e^{x^2}}+x\right)^4$
3. $y=\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)^2$
4. $y=x^2e^x-xe^{x^2}$
5. $y=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{e^{ax}+e^{bx}}$
6. $y=(1+x)^{x^2}$

5. จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $y=\sin nx\sin^n x$
2. $y=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$
3. $y=\sin(\ell n\cos x)$
4. $y=\cos^3\left(\cos^2 x\right)$
5. $y=\ell n\sin\sqrt{1+e^{3x}}$
6. $y=\sin(x+2\tan x)$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันต่อไปนี้

1. $\theta=\arcsin\sqrt{1-r^2}$
2. $f(x)=\sqrt{c^2-x^2}+c\arcsin\frac{x}{c}$
3. $y=\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}-\sin^{-1}\frac{x}{c}$
4. $y=\ell n\left(\pi+\tan^{-1}x\right)$
5. $y=x\left(x^2+9\right)^{-1}+\tan^{-1}\frac{x}{3}$
6. $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$
7. $y=(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right)$
8. $y=x\ln\left(4+x^2\right)+4\arctan\frac{x}{2}-2x$

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงลอการิทึมต่อไปนี้

1. $f(x)=\frac{(2x+3)^5(4x-1)^3}{\sqrt{2x+1}(3x+5)^4}$
2. $f(x)=\left(2x^3+4\right)\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{4x^4+x}$
3. $f(x)=\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)^x$
4. $y=\left(x^2+1\right)^2(x-1)^5x^3$
5. $y=\frac{x^4(x-1)}{(x+2)\left(x^2+1\right)}$
6. $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

NPRU

7. $y = x^2 e^{3x} \cdot \tan^3 x$

8. $y = \dfrac{x^2 \cos 5x}{(x^2+1)(x-1)^2}$

9. $y = \dfrac{x^4 \sin^2 x}{\sqrt{1-x}}$

10. $f(x) = (3x+1)^4 (2x-1)^5 (4x+1)^7$

8. แบบฝึกหัดหัวข้ออนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ อนุพันธ์อันดับสูง และฟังก์ชันโดยปริยาย

1. กำหนดให้ $y = u^2 - u$ และ $u = x - x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$
2. กำหนดให้ $y = w^{-2}$ และ $w = 2 - x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$
3. กำหนดให้ $y = u^2 + 3$ และ $u = 2x + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$
4. กำหนดให้ $y = 2u$, $u = \dfrac{1}{v}$ และ $v = 1 - 3x^2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$
5. กำหนดให้ $y = 3w^2 - 8w + 4$ และ $w = 3x^2 + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 0$
6. ให้ $x = 2\sin t, y = \cos 2t$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ และ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$
7. ให้ $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

จากข้อ 8-15 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

8. $y^2 = \dfrac{x}{xy+1}$

9. $\sin\dfrac{x}{y} = x$

10. $xy + x^2 y = 1$

11. $2xy - xy^2 + x = 0$

12. $x^x = e^{x \ln x}$

13. $x^3 + x^2 y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$

14. $x\sin xy + \cos xy = 0$

15. $(x)\ln(1+y) - 2y^3 - y\sin x = 0$

จากข้อ 16-21 จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

16. $y^3 + x^3 = 3xy$

17. $\sin y + xy = 0$

18. $y = \tan 2x$

19. $y = 3x^2 + 4x$

20. $y = x^4 + 1 + x^{-4}$

21. $y = \sin(x^2+1)$

9. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2 \cos 3x}{\sin^2 3x}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

4. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\tan \pi x}$

5. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 3x)}$

6. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\ln x}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan x - x}{2x-\arcsin x}$

8. $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}$

9. $\lim_{x\to 0}\left(e^x+3x\right)^{\frac{1}{x}}$

10. $\lim_{x\to 0^+}(x+\sin x)^x$