MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE
Department of Telecommunications Engineering
Faculty of Science and Technology

Electrical Engineering

Integral and Applications

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ปริพันธ์
2. การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต
3. การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ให้นักศึกษามีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหานิยามความหมายของปริพันธ์
2. ให้นักศึกษาสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของเนื้อหาในหัวข้อการหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิตเบื้องต้นได้
3. ให้นักศึกษาสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของเนื้อหาในหัวข้อการอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. ให้นักศึกษาสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของเนื้อหาในหัวข้อเทคนิคการอินทิเกรต
5. ให้นักศึกษาสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของเนื้อหาในหัวข้อการอินทิเกรตประยุกต์รูปแบบยังไม่กำหนด
6. ให้นักศึกษาสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาของเนื้อหาในหัวข้อการอินทิเกรตแบบจำกัดเขตและการประยุกต์ใช้

ปริพันธ์เป็นวิธีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่สามารถใช้หาพื้นที่ มวล ปริมาตร ของรูปทรงต่าง ๆ ได้ ซึ่งโดยส่วนใหญ่ในการศึกษาเรื่องปริพันธ์รูปแบบของรูปทรงต่าง ๆ จะถูกแทนด้วยฟังก์ชัน ปริพันธ์มีสองแบบด้วยกัน คือ ปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขต และปริพันธ์แบบจำกัดเขต ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ และการนำปริพันธ์ไปประยุกต์ใช้งาน โดยจะใช้คำว่าการอินทิเกรตแทนคำว่า การหาปริพันธ์ เริ่มต้นด้วยการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ เทคนิคการอินทิเกรต การอินทิเกรตประยุกต์รูปแบบยังไม่กำหนด การอินทิเกรตแบบจำกัดเขตและการประยุกต์ใช้งาน

5.1 ปริพันธ์

ปฏิยานุพันธ์ (anti-derivative) คือ กำหนดให้ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $F'(x)=f(x)$ ยกตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $F(x)=6x^2$ และ $f(x)=12x$ กล่าวได้ว่า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ เนื่องจาก $F'(x)=12x$ ซึ่งเท่ากับ $f(x)=12x$ ดังนั้นจากที่เรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาก่อนนี้ กล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า จะหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=12x$ คือ จะต้องหาฟังก์ชันที่ทำการอนุพันธ์แล้วมีค่าเท่ากับ $12x$ ซึ่งจะได้ว่า

สมมติให้	$F_1(x)=6x^2+2$	จะได้	$F_1'(x)=12x$
	$F_2(x)=6x^2-3$	จะได้	$F_2'(x)=12x$
	$F_3(x)=6x^2+200$	จะได้	$F_3'(x)=12x$

แสดงว่า $F_1(x)$, $F_2(x)$ และ $F_3(x)$ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=12x$ เช่นเดียวกัน นั่นคือ ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=12x$ มีได้หลายฟังก์ชัน สมมติให้เป็น $F(x)=6x^2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ เขียนแทนได้ดังนี้

ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=12x$ มีค่าเท่ากับ $F(x)=6x^2+c$ สำหรับการหาค่าปฏิยานุพันธ์แบบไม่จำกัดเขต หรืออินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral)

นิยามโดย $F(x)$ เป็น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ คือ การอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $\int f(x)dx = F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จึงสรุปได้ว่า ถ้า $F'(x)=f(x)$ แล้ว $\int f(x)dx = F(x)+c$

สัญลักษณ์	$\int$	คือ เครื่องหมายอินทิกรัล (integral sign)
	$\int f(x)dx$	คือ การอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x
	$f(x)$	คือ ฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรต (integrand function)
	x	คือ ตัวแปรของการอินทิเกรต (variable of integration)
	c	คือ ค่าคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration)

ในบทนี้จะเรียกวิธีการหาปฏิยานุพันธ์ แทนด้วย การอินทิเกรต (anti-derivative แทนด้วย integration) จากที่เคยศึกษามาในหัวข้อการหาอนุพันธ์ เขียนแทนด้วย $\frac{d(\ )}{dx}$ คือ การหาอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปร x ดังนั้นในการอินทิเกรต เขียนแทนด้วย $\int(\ )dx$ คือ การหาอินทิเกรตที่เทียบกับตัวแปร x เช่นเดียวกัน ซึ่งสามารถหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรที่แตกต่างได้ อาทิเช่น $\int f(\theta)d\theta$, $\int f(t)dt$, $\int f(y)dy$, $\int f(u)du$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาค่า $\int(3x^2+2x)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int(3x^2+2x)dx &= \int 3x^2dx+\int 2xdx\\ &= \frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+c\\ &= x^3+x^2+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาค่า $\int \sin(2\theta)d\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin(2\theta)d\theta &= \int \sin(2\theta)\frac{2d\theta}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int \sin(2\theta)2d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int \sin(2\theta)d2\theta\\ &= -\frac{1}{2}\cos 2\theta+c\end{aligned}$$

5.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต (algebraic) คือ ฟังก์ชันโพลิโนเมียลมีตัวแปรกำลัง n (polynomial function of degree n) ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) ที่เขียนอยู่ในรูป ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปชี้กำลัง และฟังก์ชันที่มีการบวก ลบ คูณ หาร ถอดค่ารากของฟังก์ชันโพลิโนเมียลอยู่ด้วยกัน อาทิเช่น

$3x^2+2x-6$, $\dfrac{2x^4+3x^3-6x}{x^2}$, $\sqrt{2x-6}$ และ $(3x-2)(x^2+3x)$ เป็นต้น

สูตรเบื้องต้นสำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

1. $\int 0dx = c$
2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
3. $\int dx = x + c$
4. $\int u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ตัวอย่างที่ 5.3 จงหาค่า $\int (2x^5+x^4-3x^3-2x^2+6x+3)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int (2x^5+x^4-3x^3-2x^2+6x+3)dx &= \int 2x^5dx+\int x^4dx-\int 3x^3dx-\int 2x^2dx+\int 6xdx+\int 3dx \\
&= 2\int x^5dx+\int x^4dx-3\int x^3dx-2\int x^2dx+6\int xdx+3\int dx \\
&= \frac{2x^{5+1}}{5+1}+\frac{x^{4+1}}{4+1}-\frac{3x^{3+1}}{3+1}-\frac{2x^{2+1}}{2+1}+\frac{6x^{1+1}}{1+1}+3x+c \\
&= \frac{2x^6}{6}+\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+3x+c \\
&= \frac{x^6}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+3x^2+3x+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาค่า $\int \sqrt{x}\left(2x^2+6\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\right)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\left(2x^2+6\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\right)dx &= \int \left[2x^2\left(\sqrt{x}\right)+6(x)^{1/2}\left(\sqrt{x}\right)-3(x)^{1/3}\left(\sqrt{x}\right)\right]dx \\
&= \int \left[2(x)^{5/2}+6(x)-3(x)^{5/6}\right]dx \\
&= \int 2(x)^{5/2}dx+\int 6xdx-\int 3(x)^{5/6}dx
\end{aligned}$$

$$= 2\int (x)^{5/2}dx + 6\int xdx - 3\int (x)^{5/6}dx$$

$$= 2\frac{(x)^{\frac{5}{2}+1}}{\left(5/2\right)+1} + \frac{6x^{1+1}}{1+1} - \frac{3(x)^{\frac{5}{6}+1}}{\left(5/6\right)+1} + c$$

$$= 2\frac{(x)^{\frac{7}{2}}}{\left(7/2\right)} + \frac{6x^2}{2} - \frac{3(x)^{\frac{11}{6}}}{\left(11/6\right)} + c$$

$$= \frac{4(x)^{\frac{7}{2}}}{7} + 3x^2 - \frac{18(x)^{\frac{11}{6}}}{11} + c$$

ตัวอย่างที่ 5.5 จงหาค่า $\int (x-2)^4 dx$

วิธีทำ จากโจทย์ $\int (x-2)^4 dx$ พิจารณาเทียบสูตรพื้นฐาน ใช้สูตร $\int u^n du$

กำหนดให้ $u = (x-2)$ และ $n = 4$

จัดรูปให้เข้ากับสูตรต้องหา $du = d(x-2) = dx - d2 = dx - 0 = dx$

จะได้ $du = dx$

$$\int (x-2)^4 dx = \int (x-2)^4 dx = \int (x-2)^4 d(x-2)$$

$$= \frac{(x-2)^{4+1}}{4+1} + c = \frac{(x-2)^5}{5} + c$$

ซึ่งกำลังสมบูรณ์ของ $(x-2)^5$ จะได้ $\frac{1}{5}(x-2)^5 = \frac{1}{5}\left[x^5 - 5(2)x^4 + 10(2^2)x^3 - 10(2^3)x^2 + 5(2^4)x - (2^5)\right]$

ดังนั้น $\frac{(x-2)^5}{5} + c = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x + c$

จากตัวอย่างที่ 5.5 จงหาค่า $\int (x-2)^4 dx$ โดยใช้วิธีแยกตัวประกอบก่อนแล้วหาค่าอินทิเกรต

$$(x-2)^4 = x^4 - 4(2)x^3 + 6(-2)^2x^2 - 4(2)^3x + 2^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 23x + 16$$

เพราะฉะนั้น $\int (x-2)^4 dx = \int (x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 23x + 16)dx$

$$= \int x^4dx - \int 8x^3dx + \int 24x^2dx - \int 23xdx + \int 16dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{8x^4}{4} + \frac{24x^3}{3} - \frac{23x^2}{2} + 16x + c$$

พบว่าคำตอบที่ได้เท่ากัน คือ $= \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x + c$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาค่า $\int x(x^2+4)^7 dx$

วิธีทำ

พิจารณาโจทย์ควรใช้สูตร $\int u^n du$ โดยเลือก $u=(x^2+4)$ และ $n=7$ แล้วจะได้

$du=d(x^2+4)=dx^2+d4=2xdx+0=2xdx$

นำ $du=2xdx$ เทียบกับโจทย์ $\int (x^2+4)^7 xdx$ พบว่าเกินจากส่วนที่เหลือ (xdx) เท่ากับ 2 แสดงว่าสูตรนี้ใช้ได้ โดยจัดรูปให้เข้าสูตรและทำการปรับค่า ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int x(x^2+4)^7 dx &= \int (x^2+4)^7(xdx)\\ &= \int (x^2+4)^7\left(\frac{2xdx}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int (x^2+4)^7(2xdx)\\ &= \frac{1}{2}\int (x^2+4)^7 d(x^2+4)\\ &= \frac{(x^2+4)^8}{2(8)}+c\\ &= \frac{(x^2+4)^8}{16}+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาค่า $\int 6x^2(x^3-5)^9 dx$

วิธีทำ

พิจารณาโจทย์ควรใช้สูตร $\int u^n du$ โดยเลือก $u=(x^3-5)$ และ $n=9$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}\int 6x^2(x^3-5)^9 dx &= 6\int (x^3-5)^9(x^2dx)\\ &= 6\int (x^3-5)^9\left(\frac{3x^2dx}{3}\right)\\ &= \frac{6}{3}\int (x^3-5)^9(3x^2dx)\\ &= \frac{6}{3}\int (x^3-5)^9 d(x^3-5)\\ &= \frac{6(x^3-5)^{10}}{3(10)}+c\\ &= \frac{(x^3-5)^{10}}{5}+c\end{aligned}$$

ใช้สูตร $\int u^n du$

กำหนดให้ $u=(x^3-5)$ และ $n=9$

$du=d(x^3-5)$

$du=3x^2dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา 3 ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาค่า $\int \sqrt{\cot(4x)}\,\mathrm{cosec}^2(4x)dx$

วิธีทำ

พิจารณาโจทย์ควรใช้สูตร $\int u^n du$ โดยเลือก $u=\cot(4x)$ และ $n=\frac{1}{2}$ แล้วจะได้

$$\int \sqrt{\cot(4x)}\,\mathrm{cosec}^2(4x)dx = \int (\cot(4x))^{\frac{1}{2}}(\mathrm{cosec}^2(4x)dx)$$
$$= \int (\cot(4x))^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4\,\mathrm{cosec}^2(4x)dx}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\int (\cot(4x))^{\frac{1}{2}}(4\,\mathrm{cosec}^2(4x)dx)$$
$$= -\frac{1}{4}\int (\cot(4x))^{\frac{1}{2}}d(\cot(4x))$$
$$= -\frac{(\cot(4x))^{\frac{3}{2}}}{4\left(\frac{3}{2}\right)}+c$$
$$= -\frac{(\cot(4x))^{\frac{3}{2}}}{6}+c$$

ใช้สูตร $\int u^n du$

กำหนดให้ $u=\cot(4x)$ และ $n=\frac{1}{2}$

$du = d\cot(4x)$

$du = -4\mathrm{cosec}^2(4x)dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา -4 ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

วิธีทำ พิจารณาโจทย์ควรใช้สูตร $\int u^n du$ โดยเลือก $u=e^{\sqrt{x}}$ และ $n=\frac{1}{2}$ แล้วจะได้

$$\int \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{(e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \int (e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}\right)$$
$$= \int (e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(2)e^{\sqrt{x}}dx}{(2)\sqrt{x}}\right)$$
$$= 2\int (e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{(2)\sqrt{x}}\right)$$
$$= 2\int (e^{\sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}d(e^{\sqrt{x}})$$
$$= \frac{2(e^{\sqrt{x}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{4(e^{\sqrt{x}})^{\frac{3}{2}}}{3}+c$$

ใช้สูตร $\int u^n du$

กำหนดให้ $u=e^{\sqrt{x}}$ และ $n=\frac{1}{2}$

$du = d(e^{\sqrt{x}})$

$du = e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x})$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา $\frac{1}{2}$ ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.10 จงหาค่า $\int \frac{\arcsin(3x)}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

วิธีทำ พิจารณาโจทย์ควรใช้สูตร $\int u^n du$ โดยเลือก $u=\arcsin(3x)$ และ $n=1$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin(3x)}{\sqrt{1-9x^2}}dx &= \int \arcsin(3x)\left(\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}\right) \\
&= \int \arcsin(3x)\left(\frac{3dx}{3\sqrt{1-9x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\int \arcsin(3x)d(\arcsin(3x)) \\
&= \frac{(\arcsin(3x))^2}{6}+c
\end{aligned}$$

ใช้สูตร $\int u^n du$

กำหนดให้ $u=\arcsin(3x)$ และ $n=1$

$$du = d(\arcsin(3x))$$

$$du = \frac{3dx}{\sqrt{1-(3x)^2}}$$

$$du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

เทียบส่วนที่เหลือไม่เกิน 3 ใช้สูตรนี้ได้

ในกรณีที่อินทิกรัลใดก็ตาม ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปเศษส่วน เมื่อเศษและส่วนเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียล และเศษมีกำลังมากกว่าหรือเท่ากับส่วนแล้ว ให้หารแบบพีชคณิตก่อน จนเศษมีกำลังน้อยกว่าส่วน จึงนำไปแยกอินทิเกรตทีละพจน์

ตัวอย่างที่ 5.11 จงหาค่า $\int \frac{x^6-2x^4+x^2+x}{x^4-2x^2+1}dx$

วิธีทำ พิจารณาโจทย์ $\frac{x^6-2x^4+x^2+x}{x^4-2x^2+1}$ ทำให้เป็นจำนวนตรรกยะแท้ โดยหารยาวให้กำลังของเศษน้อยกว่ากำลังของส่วน

$$\begin{aligned}
\frac{x^6-2x^4+x^2+x}{x^4-2x^2+1} &= x^2+\frac{x}{x^4-2x^2+1} \\
&= x^2+\frac{x}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
x^2 \\
x^4-2x^2+1\,\big)\,\overline{x^6-2x^4+x^2+x} \\
x^6-2x^4+x^2 \\
x
\end{array}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^6-2x^4+x^2+x}{x^4-2x^2+1}dx &= \int\left(x^2+\frac{x}{(x^2-1)^2}\right)dx \\
&= \int x^2dx+\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx \\
&= \int x^2dx+\int (x^2-1)^{-2}(xdx)
\end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \int (x^2-1)^{-2}\left(\frac{2xdx}{2}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-2}(2xdx)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-2}d(x^2-1)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{(x^2-1)^{-1}}{2(-1)} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2(x^2-1)} + c$$

5.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันเหล่านี้ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เรียกว่า ฟังก์ชันอดิศัย (transcendental functions) ได้แก่ ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) ฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function) และฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric function) ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการ และเทคนิคการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันต่าง ๆ เหล่านี้

5.3.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม

สูตร $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c$ เมื่อ $u \neq 0$

สูตรในการอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม คือ สูตร $\int \frac{1}{u}du = \int u^{-1}du$ พบว่าคล้ายกับสูตร $\int u^n du$ ให้พิจารณากำลังของ u ถ้ากำลังของ u เป็น -1 ให้ใช้สูตร $\int \frac{1}{u}du$ แต่ถ้ากำลังของ u เป็นค่าคงที่อื่น ๆ ที่ไม่ใช่ -1 ให้ใช้สูตร $\int u^n du$

ตัวอย่างที่ 5.12 จงหาค่า $\int \frac{x}{x^2+6}dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{x}{x^2+6}dx = \int \frac{1}{x^2+6}(xdx)$$

$$= \int \frac{1}{x^2+6}\frac{(2xdx)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+6}(2xdx)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+6}d(x^2+6)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|(x^2+6)| + c$$

ใช้สูตร $\int \frac{1}{u}du$
กำหนดให้ $u = x^2+6$
$du = d(x^2+6)$
$du = 2xdx$
เทียบส่วนที่เหลือ เกินมา 2

ตัวอย่างที่ 5.13 จงหาค่า $\int \frac{x+4}{x^2+8x-3}dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{x+4}{x^2+8x-3}dx = \int \frac{1}{x^2+8x-3}(x+4)dx$$
$$= \int \frac{1}{x^2+8x-3}\frac{2(x+4)dx}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+8x-3}(2x+8)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+8x-3}d(x^2+8x-3)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|(x^2+8x-3)\right|+c$$

ใช้สูตร $\int \frac{1}{u}du$
กำหนดให้ $u = x^2+8x-3$
$du = d(x^2+8x-3)$
$du = 2(x+4)dx$
เทียบส่วนที่เหลือ เกินมา 2

ตัวอย่างที่ 5.14 จงหาค่า $\int \frac{dx}{\mathrm{cosec}(3x)-\cot(3x)}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{\mathrm{cosec}(3x)-\cot(3x)} = \int \frac{dx}{\mathrm{cosec}(3x)-\cot(3x)}$$
$$= \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sin(3x)}\right)-\left(\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\right)}dx$$
$$= \int \frac{\sin(3x)}{1-\cos(3x)}dx$$
$$= \int \frac{1}{1-\cos(3x)}\sin(3x)dx$$
$$= \int \frac{1}{1-\cos(3x)}\frac{3\sin(3x)dx}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-\cos(3x)}3\sin(3x)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-\cos(3x)}d(1-\cos(3x)) = \frac{1}{3}\ln\left|1-\cos(3x)\right|+c$$

ใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติ
$$\frac{1}{\mathrm{cosec}(3x)-\cot(3x)} = \frac{1}{\frac{1}{\sin(3x)}-\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}} = \frac{1}{\frac{1-\cos(3x)}{\sin(3x)}} = \frac{\sin(3x)}{1-\cos(3x)}$$

ใช้สูตร $\int \frac{1}{u}du$
กำหนดให้ $u = 1-\cos(3x)$
$du = d(1-\cos(3x))$
$du = 3\sin(3x)dx$
เทียบส่วนที่เหลือ เกินมา 3

ตัวอย่างที่ 5.15 จงหาค่า $\int \frac{(e^{2x}+2)}{(e^{2x}+1)}dx$

วิธีทำ จากโจทย์นำสมการ $\frac{(e^{2x}+2)}{(e^{2x}+1)}$ จัดรูปใหม่จะได้ $\frac{2+e^{2x}}{1+e^{2x}}$ เพื่อทำการหาร ซึ่งจะได้

จะได้ $\frac{2+e^{2x}}{1+e^{2x}}=2-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\frac{(e^{2x}+2)}{(e^{2x}+1)}dx &= \int\left[2-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]dx\\ &= \int 2dx-\int\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx\\ &= 2x-\int\frac{1}{1+e^{2x}}(e^{2x})dx\\ &= 2x-\int\frac{1}{1+e^{2x}}\frac{(2e^{2x})dx}{2}\\ &= 2x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+e^{2x}}(2e^{2x})dx\\ &= 2x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+e^{2x}}d(1+e^{2x}) = 2x-\frac{1}{2}\ln\left|1+e^{2x}\right|+c\end{aligned}$$

จัดรูปใหม่ด้วยการหาร

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1+e^{2x}\overline{)2+e^{2x}} \\ 2+2e^{2x} \\ \underline{\underline{-e^{2x}}} \end{array}$$

ใช้สูตร $\int\frac{1}{u}du$

กำหนดให้ $u=1+e^{2x}$

$du=d(1+e^{2x})$

$du=(2e^{2x})dx$

เทียบส่วนที่เหลือ เกินมา 2

5.3.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง

สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลังมี 2 สูตร ดังนี้

1. $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln(a)}+c$
2. $\int e^u du=e^u+c$

โดยสูตรที่ 1 เมื่อตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป a^u ค่า a เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ u เป็นฟังกชันของตัวแปรใด ๆ และสูตรที่ 2 เมื่อตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $e^u (e\approx 2.71828...)$ ค่า e เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ u เป็นฟังกชันของตัวแปรใด ๆ

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหาค่า $\int x9^{x^2-4}dx$

วิธีทำ เนื่องจากตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป a^u มีค่าคงที่ 9 ยกกำลังฟังก์ชัน (x^2-4) ควรจะใช้สูตร $\int a^u du$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x9^{x^2-4}dx &= \int\left(9^{x^2-4}\right)xdx\\ &= \int\left(9^{x^2-4}\right)\frac{2xdx}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int\left(9^{x^2-4}\right)2xdx\\ &= \frac{1}{2}\int\left(9^{x^2-4}\right)d(x^2-4)\\ &= \frac{1}{2}\frac{9^{x^2-4}}{\ln(9)}+c\end{aligned}$$

ใช้สูตร $\int a^u du$

กำหนดให้ $u=x^2-4$ และ $a=9$

$du=d(x^2-4)$

$du=2xdx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา 2 ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.17 จงหาค่า $\int (x-3)e^{x^2-6x+1}dx$

วิธีทำ

$$\int (x-3)e^{x^2-6x+1}dx = \int e^{x^2-6x+1}(x-3)dx$$

$$= \int e^{x^2-6x+1}\frac{2(x-3)dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2-6x+1}2(x-3)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(e^{x^2-6x+1}\right)d\left(x^2-6x+1\right)$$

$$= \frac{\left(e^{x^2-6x+1}\right)}{2}+c$$

ใช้สูตร $\int e^u du$

กำหนดให้ $u = x^2-6x+1$

$du = d\left(x^2-6x+1\right)$

$du = 2(x-3)dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา 2 ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.18 จงหาค่า $\int \sec^2(x)e^{\tan(x)}dx$

วิธีทำ

$$\int \sec^2(x)e^{\tan(x)}dx = \int e^{\tan(x)}\sec^2(x)dx$$

$$= \int e^{\tan(x)}\sec^2(x)dx$$

$$= \int e^{\tan(x)}d\tan(x) = e^{\tan(x)}+c$$

ใช้สูตร $\int e^u du$

กำหนดให้ $u = \tan(x)$

$du = d\tan(x)$

$du = \sec^2(x)dx$

ไม่มีส่วนที่เหลือเกินมา ใช้สูตรนี้ได้

5.3.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติมีสูตรที่ใช้หาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังต่อไปนี้

1. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$
2. $\int \cos u\,du = \sin u + c$
3. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$
4. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + c$
5. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$
6. $\int \operatorname{cosec} u \cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + c$
7. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + c$
8. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$
9. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$
10. $\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$

จากสูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติด้านบน หากตัวถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ที่นอกเหนือจาก 10 สูตร จะต้องนำความรู้เกี่ยวกับพีชคณิตและคุณสมบัติทางตรีโกณมิติเข้ามาช่วยเพื่อจัดรูปฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตให้เข้าสูตร วิธีการหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันกลุ่มตรีโกณมิติเหล่านี้ก็ใช้หลักการเดิมที่เรียนมาก่อนนี้ทุกประการ

ตัวอย่างที่ 5.19 จงหาค่า $\int \sin(3x+2)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin(3x+2)dx &= \int \sin(3x+2)\frac{3dx}{3}\\ &= \frac{1}{3}\int \sin(3x+2)3dx\\ &= \frac{1}{3}\int \sin(3x+2)d(3x+2)\\ &= \frac{-\cos(3x+2)}{3}+c\end{aligned}$$

ใช้สูตร $\int \sin(u)du$

กำหนดให้ $u=(3x+2)$

$du = d(3x+2)$

$du = 3dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา 3 ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.20 จงหาค่า $\int 2e^{4x}\cos(e^{4x})dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int 2e^{4x}\cos(e^{4x})dx &= 2\int \cos(e^{4x})e^{4x}dx\\ &= 2\int \cos(e^{4x})\frac{4e^{4x}dx}{4}\\ &= \frac{2}{4}\int \cos(e^{4x})4e^{4x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(e^{4x})d(e^{4x})\\ &= \frac{\sin(e^{4x})}{2}+c\end{aligned}$$

ใช้สูตร $\int \cos(u)du$

กำหนดให้ $u=e^{4x}$

$du = d(e^{4x})$

$du = 4e^{4x}dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา 4 ใช้สูตรนี้ได้

ตัวอย่างที่ 5.21 จงหาค่า $\int \frac{x^2}{2}\operatorname{cosec}(x^3-2)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{2}\operatorname{cosec}(x^3-2)dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}(x^3-2)x^2dx\\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}(x^3-2)\frac{3x^2dx}{3}\\ &= \frac{1}{6}\int \operatorname{cosec}(x^3-2)3x^2dx\\ &= \frac{1}{6}\int \operatorname{cosec}(x^3-2)d(x^3-2)\\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\operatorname{cosec}(x^3-2)-\cot(x^3-2)\right|+c\end{aligned}$$

ใช้สูตร $\int \cos(u)du$

กำหนดให้ $u=(x^3-2)$

$du = d(x^3-2)$

$du = 3x^2dx$

เทียบส่วนที่เหลือเกินมา 3 ใช้สูตรนี้ได้

NPRU

ตัวอย่างที่ 5.22 จงหาค่า $\int [\sin(x)-\cos(x)]^2 dx$

วิธีทำ

$$\int [\sin(x)-\cos(x)]^2 dx = \int [\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)]dx$$

$$= \int \sin^2(x)dx - \int 2\sin(x)\cos(x)dx + \int \cos^2(x)dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx - \int \sin(2x)dx + \int \frac{1}{2}(1+\cos(2x))dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int 1dx - \int \cos(2x)dx\right\} - \int \sin(2x)\frac{2dx}{2} + \frac{1}{2}\left\{\int 1dx + \int \cos(2x)dx\right\}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\frac{2dx}{2} - \frac{1}{2}\int \sin(2x)2dx + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\frac{2dx}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)2dx - \frac{1}{2}\int \sin(2x)d(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos(2x)2dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)d(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos(2x)d(2x)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

$$= x + \frac{\cos(2x)}{2} + c$$

ใช้สูตร $\int \sin(u)du$
และ $\int \cos(u)du$

$u = 2x$

$du = 2dx$

เกินมา 2

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

หรือสามารถแสดงได้อีกหนึ่งวิธี ดังนี้

$$\int [\sin(x)-\cos(x)]^2 dx = \int [\sin^2(x)+\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x)]dx$$

$$= \int [1-\sin(2x)]dx \quad = \int 1dx - \int \sin(2x)dx$$

$$= x - \int \sin(2x)\frac{2dx}{2} \quad = x - \frac{1}{2}\int \sin(2x)2dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\int \sin(2x)d(2x) \quad = x + \frac{\cos(2x)}{2} + c$$

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ

$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$

$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$

สำหรับตัวถูกอินทิเกรตใดที่ไม่สามารถใช้สูตรอินทิเกรตได้ และตัวถูกอินทิเกรตมีลักษณะเป็นเศษส่วน และตัวส่วนอยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ดังนี้ $1\pm\sin(x)$, $\sin(x)\pm1$, $1\pm\cos(x)$, $1\pm\cos(x)$, $1\pm\sec(x)$, $1\pm\sec(x)$, $1\pm\text{cosec}(x)$, $1\pm\text{cosec}(x)$ ให้จัดรูปอินทิกรัลใหม่โดยให้นำสังยุคของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าวคูณทั้งเศษและส่วน จะทำให้ส่วนของตัวถูกอินทิเกรตมีพจน์เดียวด้วยสูตรตรีโกณมิติ เช่น $1-\sin^2(x)=\cos^2(x)$, $1-\cos^2(x)=\sin^2(x)$, $\sec^2(x)-1=\tan^2(x)$ และ $\text{cosec}^2(x)-1=\cot^2(x)$ แล้วแยกเศษส่วนเพื่อทำการอินทิเกรตทีละพจน์ด้วยวิธีการที่เคยเรียนมาแล้ว

ตัวอย่างที่ 5.23 จงหาค่า $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$

วิธีทำ $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx = \int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}\left(\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)}\right)dx$

$$= \int \frac{\sin^3(x)(1-\cos(x))}{1-\cos^2(x)}dx$$

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ
$\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$

$$= \int \frac{\sin^3(x)(1-\cos(x))}{\sin^2(x)}dx$$

$$= \int \sin(x)(1-\cos(x))dx$$

$$= \int (\sin(x)-\sin(x)\cos(x))dx$$

$$= \int \sin(x)dx - \int \sin(x)\cos(x)dx$$

$$= -\cos(x) - \int \sin(x)d\sin(x) \quad = -\cos(x) - \frac{\sin^2(x)}{2} + c$$

ตัวอย่างที่ 5.24 จงหาค่า $\int \frac{1}{\operatorname{cosec}(x)+1}dx$

วิธีทำ

$$\int \frac{1}{\operatorname{cosec}(x)+1}dx = \int \frac{1}{\operatorname{cosec}(x)+1}\left(\frac{\operatorname{cosec}(x)-1}{\operatorname{cosec}(x)-1}\right)dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}(x)-1}{\operatorname{cosec}^2(x)-1}dx$$

ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ
$\cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)-1$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}(x)-1}{\cot^2 x}dx$$

$$= \int \left(\frac{\operatorname{cosec}(x)}{\cot^2(x)} - \frac{1}{\cot^2(x)}\right)dx$$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec}(x)}{\cot^2(x)}dx - \int \frac{1}{\cot^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin(x)}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}dx - \int \tan^2(x)dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx - \int (\sec^2(x)-1)dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx - \int \sec^2(x)dx + \int 1dx$$

$$= \int \sec(x)\tan(x)dx - \tan(x) + x \quad = \sec(x) - \tan(x) + x + c$$

ตัวอย่างที่ 5.25 จงหาค่า $\int \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}dx$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}dx &= \int \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)dx \\
&= \int \frac{(1+\sin(x))(1+\cos(x))}{1-\cos^2(x)}dx \\
&= \int \frac{1+\sin(x)+\cos(x)+\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx + \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)}dx + \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx + \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)}dx \\
&= \int \mathrm{cosec}^2(x)dx + \int \mathrm{cosec}(x)dx + \int \frac{1}{\sin(x)}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx \\
&= -\cot(x) + \ln\left|\mathrm{cosec}(x) - \cot(x)\right| + \int \mathrm{cosec}(x)\cot(x)dx + \int \cot(x)dx \\
&= -\cot(x) + \ln\left|\mathrm{cosec}(x) - \cot(x)\right| - \mathrm{cosec}(x) + \ln\left|\sin(x)\right| + c
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5.26 จงหาค่า $\int \frac{1-\sin(2x)}{\tan(2x)}dx$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-\sin(2x)}{\tan(2x)}dx &= \int \left(\frac{1}{\tan(2x)} - \frac{\sin(2x)}{\tan(2x)}\right)dx \\
&= \int \left(\cot(2x) - \frac{\sin(2x)}{\sin(2x)/\cos(2x)}\right)dx \\
&= \int \cot(2x)\frac{2dx}{2} - \int \cos(2x)\frac{2dx}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int \cot(2x)2dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)2dx \\
&= \frac{1}{2}\int \cot(2x)d(2x) - \frac{1}{2}\int \cos(2x)d(2x) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\sin(2x)\right| - \frac{\sin(2x)}{2} + c
\end{aligned}
$$

NPRU

5.3.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

สูตรที่ใช้ในการหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันมีดังนี้

1. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$
2. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$
3. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$
5. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$
6. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$
7. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$
8. $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c$
9. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+c$
10. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$

สังเกตพบว่าสูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันดัง 10 สูตรด้านบนนี้ ตัวถูกอินทิเกรตมีพจน์ที่เป็นแบบ u^2+a^2, u^2-a^2, และ a^2-u^2 อยู่ทุกสูตร แต่อยู่ในลักษณะที่แตกต่างกัน อาทิเช่น

u^2+a^2, u^2-a^2, และ a^2-u^2	อยู่ที่ส่วน
$\sqrt{u^2+a^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$, และ $\sqrt{a^2-u^2}$	อยู่ที่ส่วน
$\sqrt{u^2+a^2}$, $\sqrt{u^2-a^2}$, และ $\sqrt{a^2-u^2}$	อยู่ที่เศษ
และ $u\sqrt{u^2-a^2}$,	อยู่ที่ส่วน

อินทิกรัลที่จะใช้สูตรกลุ่มนี้ คือ อินทิกรัลที่มีนิพจน์ที่สามารถจัดให้เข้ารูป u^2+a^2, u^2-a^2, หรือ a^2-u^2 รูปใดรูปหนึ่งได้ แบ่งเป็นสองแบบดังนี้

1. อินทิกรัลที่มีฟังก์ชันประกอบด้วย 2 พจน์ที่เป็นพจน์ของตัวแปร และพจน์ค่าคงที่ เช่น

$2x^2-9=(\sqrt{2}x)^2-3^2$ จัดแล้วอยู่ในรูป u^2-a^2 โดยมี $u=\sqrt{2}x$ และ $a=3$

$3-4x^2=(\sqrt{3})^2-(2x)^2$ จัดแล้วอยู่ในรูป a^2-u^2 โดยมี $u=2x$ และ $a=\sqrt{3}$

$x^4-4=(x^2)^2-2^2$ จัดแล้วอยู่ในรูป u^2-a^2 โดยมี $u=x^2$ และ $a=2$

$36x^2+1=(6x)^2+1^2$ จัดแล้วอยู่ในรูป u^2+a^2 โดยมี $u=6x$ และ $a=1$

$\sin^2(x)+16=(\sin x)^2+4^2$ จัดแล้วอยู่ในรูป u^2+a^2 โดยมี $u=\sin(x)$ และ $a=4$

$e^{4x}-16=(e^{2x})^2-4^2$ จัดแล้วอยู่ในรูป u^2-a^2 โดยมี $u=e^{2x}$ และ $a=4$

2. อินทิกรัลที่ประกอบด้วยพหุนามต่าง ๆ ทั่วไปที่สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบ u^2+a^2, u^2-a^2, หรือ a^2-u^2 ได้ โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ เช่น

- $x^2-8x+41=x^2-8x+16-16+41=(x^2-8x+16)+25$

  $=(x-4)^2+5^2$ เข้ารูป u^2+a^2 โดย $u=(x-4)$ และ $a=5$

- $12-x^2+4x\ =12-(x^2-4x)=12-(x^2-4x+4-4)=12-(x^2-4x+4)+4=16-(x^2-4x+4)$

  $=4^2-(x-2)^2$ เข้ารูป a^2-u^2 โดย $u=(x-2)$ และ $a=4$

- $2x^2-4x+6\ =2(x^2-2x+3)=2(x^2-2x+1-1+3)=2((x^2-2x+1)+2)=2\left[(x-1)^2+(\sqrt{2})^2\right]$

  $=2\left[(x-1)^2+(\sqrt{2})^2\right]$ เข้ารูป u^2+a^2 โดย $u=(x-1)$ และ $a=\sqrt{2}$

- $x^4-4x^2+3\ =x^4-4x^2+4-1=(x^4-4x^2+4)-1=(x^2-2)^2-(1)^2$

  $=(x^2-2)^2-(1)^2$ เข้ารูป u^2-a^2 โดย $u=(x^2-2)$ และ $a=1$

การอินทิกรัลฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันดังที่ได้กล่าวมานั้น จะต้องจัดรูปให้พหุนามเป็น u^2+a^2, u^2-a^2, หรือ a^2-u^2 รูปแบบใดรูปหนึ่งเพื่อให้สามารถหาค่าอินทิเกรตได้ แล้วนำ u มาหาค่า du เพื่อตรวจสอบว่าตรงกับสูตรใดใน 10 สูตรดังกล่าวแล้ว เขียนตัวถูกอินทิเกรตให้เข้าสูตรที่จะใช้ เริ่มจากจัดพหุนามที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ก่อน แล้วจะได้ค่า u และ a แล้วหาค่า du โดยมี u เหมือนกับ u ในพหุนามที่จัดเป็นกำลังสองสมบูรณ์ และหากมีค่าคงที่เกินมาก็ให้ปรับค่าด้วย สูตรที่ 1 ถึง 9 เขียนให้เข้าสูตรดังนี้ $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ และสูตรที่ 10 สามารถเขียนให้เข้าสูตรดังนี้ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$ จากนั้นก็หาค่าอินทิเกรตตามวิธีที่เคยเรียนมา

NPRU

ตัวอย่างที่ 5.27 จงหาค่า $\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$

วิธีทำ

จาก $x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x^2-4x+4)+4 = (x-2)^2+2^2$ เข้ารูป u^2+a^2 โดย $u=(x-2)$ และ $a=2$ แล้วหาค่า $du=d(x-2)=dx$ แสดงว่ายังใช้สูตร $\int \frac{du}{u^2+a^2}$ ไม่ได้

ใช้การอินติเกรตโดยแยกเศษส่วน ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{x}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4+4}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{4}{x^2-4x+8}dx\right] + \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \frac{4}{2}\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx + \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-4x+8}(2x-4)dx + 3\int \frac{dx}{x^2-4x+8} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-4x+8}d(x^2-4x+8) + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|(x^2-4x+8)\right| + \frac{3}{2}\arctan\frac{(x-2)}{2} + c
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5.28 จงหาค่า $\int \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$

วิธีทำ จาก $x^2+2x-3 = x^2+2x+1-1-3 = (x^2+2x+1)-4 = (x+1)^2-2^2$ เข้ารูป u^2-a^2 โดย $u=(x+1)$ และ $a=2$ แล้วหาค่า $du=d(x+1)=dx$ แสดงว่ายังใช้สูตร $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$ ไม่ได้

ใช้การอินติเกรตโดยแยกเศษส่วน ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^{1/2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}\right]
\end{aligned}
$$

NPRU

$$=\frac{1}{2}\left[\int\left(x^2+2x-3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-2^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\left(x^2+2x-3\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2+2x-3\right)+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-2^2}}\right]$$

$$=\frac{\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}+\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-2^2}\right|+c$$

$$=\left(x^2+2x-3\right)^{\frac{1}{2}}+\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}\right|+c$$

ตัวอย่างที่ 5.29 จงหาค่า $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

วิธีทำ $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{(2x)^2-3^2}}$

$$=\int\frac{2dx}{(2x)\sqrt{(2x)^2-3^2}}$$

$$=\int\frac{d(2x)}{(2x)\sqrt{(2x)^2-3^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{2x}{3}+c$$

ใช้สูตร $\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$

$u=2x$

$du=2dx$

เกินมา 2

ตัวอย่างที่ 5.30 จงหาค่า $\int\frac{\cos(2x)dx}{\sqrt{8-\sin^2(2x)}}$

วิธีทำ $\int\frac{\cos(2x)dx}{\sqrt{8-\sin^2(2x)}}=\int\frac{\cos(2x)dx}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\sin^2(2x)}}$

$$=\int\frac{2\cos(2x)dx}{2\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\sin^2(2x)}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2\cos(2x)dx}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\sin^2(2x)}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin(2x)}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\sin^2(2x)}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{2}}+c$$

ใช้สูตร $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

$u=\sin(2x)$

$du=2\cos(2x)dx$

เกินมา 2

5.3.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง (integration the power of trigonometric functions) เป็นการหาค่าอินทิกรัลเพิ่มเติมจากฟังก์ชันตรีโกณมิติทั่วไปเป็นแบบฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง และแบบผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง ซึ่งมีสูตรแบ่งเป็น 6 แบบ ที่ใช้สำหรับการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังได้แก่

1. $\int \sin^n(u)du$ และ $\int \cos^n(u)du$
2. $\int \sin^m(u)\cos^n(u)du$
3. $\int \sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$ และ $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$
4. $\int \tan^n(u)du$ และ $\int \cot^n(u)du$
5. $\int \sec^n(u)du$ และ $\int \operatorname{cosec}^n(u)du$
6. $\int \tan^m(u)\sec^n(u)du$ และ $\int \cot^m(u)\operatorname{cosec}^n(u)du$

แบบที่ 1 $\int \sin^n(u)du$ และ $\int \cos^n(u)du$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก สามารถแบ่งวิธีการหาค่าอินทิกรัลออกเป็นสามกรณีด้วยกันดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวกให้แทนด้วยคุณสมบัติของตรีโกณมิติด้วย $\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ หรือ $\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ ทำให้กำลังของฟังก์ชันตรีโกณมิติลดลง แล้วจัดนิพจน์ของตัวถูกอินทิเกรตให้เข้ารูปแล้วแยกอินทิเกรตที่ละพจน์ โดยใช้สูตรการอินทิเกรตต่าง ๆ ที่เคยเรียนผ่านมาแล้วทั้งหมด โดยส่วนมากจะเข้าสูตร $\int u^n du$

ตัวอย่างที่ 5.31 จงหาค่า $\int \sin^4(3x)dx$

วิธีทำ $\int \sin^4(3x)dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left(\sin^2(3x)\right)^2 dx \\
&= \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos(6x))\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos(6x)+\cos^2(6x)\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1)dx - \frac{2}{4}\int \cos(6x)dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(6x)dx \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos(6x)\frac{6dx}{6} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos(12x))dx \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{12}\int \cos(6x)d(6x) + \frac{1}{8}\int (1)dx + \frac{1}{8}\int \cos(12x)\frac{12dx}{12}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{12}\sin(6x)+\frac{x}{8}+\frac{1}{96}\int\cos(12x)d(12x)$$
$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{12}\sin(6x)+\frac{x}{8}+\frac{1}{96}\sin(12x)+c$$
$$=\frac{3x}{8}-\frac{1}{12}\sin(6x)+\frac{1}{96}\sin(12x)+c$$

กรณีที่ 2 ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวก ให้จัดรูปดังนี้

- ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็น $\int\sin^n(u)du$ ให้แทน $\sin^n(x)$ ด้วย $\sin^n(x)=\sin^{n-1}(x).\sin(x)$ แล้วแทน $\sin^{n-1}(x)$ เป็น $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$ แล้วปรับ du เป็น $d(\cos(x))=-\sin(x)dx$
- ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็น $\int\cos^n(u)du$ ให้แทน $\cos^n(x)$ ด้วย $\cos^n(x)=\cos^{n-1}(x).\cos(x)$ แล้วแทน $\cos^{n-1}(x)$ เป็น $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ แล้วปรับ du เป็น $d(\sin(x))=\cos(x)dx$

ตัวอย่างที่ 5.32 จงหาค่า $\int\cos^5(4x)dx$

วิธีทำ $\int\cos^5(4x)dx$

$$=\int\cos^4(4x)\cos(4x)dx$$
$$=\int\left[1-\sin^2(4x)\right]^2\cos(4x)dx$$
$$=\int\left[1-2\sin^2(4x)+\sin^4(4x)\right]\frac{\cos(4x)dx}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\int\left[1-2\sin^2(4x)+\sin^4(4x)\right]4\cos(4x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int\left[1-2\sin^2(4x)+\sin^4(4x)\right]d\sin(4x)$$
$$=\frac{1}{4}\int d\sin(4x)-\frac{2}{4}\int\sin^2(4x)d\sin(4x)+\frac{1}{4}\int\sin^4(4x)d\sin(4x)$$
$$=\frac{\sin(4x)}{4}-\frac{1}{2}\frac{\sin^3(4x)}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sin^5(4x)}{5}+c$$
$$=\frac{\sin(4x)}{4}-\frac{\sin^3(4x)}{6}+\frac{\sin^5(4x)}{20}+c$$

กรณีที่ 3 ถ้า n เป็นจำนวนคู่หรือคี่ สามารถหาค่า $\int\sin^n(u)du$ และ $\int\cos^n(u)du$ โดยใช้สูตรลดทอนต่อไปนี้

- $\int\sin^n(u)du=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}u\cos u+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}u\,du$
- $\int\cos^n(u)du=\frac{1}{n}\cos^{n-1}u\sin u+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}u\,du$

สูตรลดทอนทั้งสองสูตรจะใช้ในกรณีที่ $n \geq 2$ ถ้ากรณี $n=1$ ก็ไม่จำเป็นต้องใช้เพราะว่าสามารถใช้สูตร $\int \sin(u)du$ หรือ $\int \cos(u)du$ ได้ ในแต่ละครั้งที่ใช้สูตรลดทอน n จะลดลงทีละ 2 จนกระทั่งเหลือ $n=1$ หรือ $n=0$

ถ้า $n=1$ สามารถใช้สูตรทั่วไปได้ คือ $\int \sin(u)du$ หรือ $\int \cos(u)du$

ถ้า $n=0$ คือจะได้ $\int \sin^0(u)du = \int 1du = u+c$ หรือ $\int \cos^0(u)du = \int 1du = u+c$

ตัวอย่างที่ 5.33 จงหาค่า $\int \sin^4(3x)dx$

วิธีทำ ใช้สูตรลดทอน $\int \sin^n(u)du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}u\,du$

โดย $u=3x$ ดังนั้น $du=3dx$ เกินมา 3 ปรับค่าโดยการหารด้วย 3 จะได้

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(3x)dx &= \int \sin^4(3x)\frac{3dx}{3} = \frac{1}{3}\int \sin^4(3x)d(3x) \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\sin^{4-1}(3x)\cos(3x) + \frac{4-1}{4}\int \sin^{4-2}(3x)d(3x)\right] \\
&= \frac{1}{12}\sin^3(3x)\cos(3x) + \frac{1}{4}\int \sin^2(3x)d(3x) \\
&= \frac{1}{12}\sin^3(3x)\cos(3x) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin^{2-1}(3x)\cos(3x) + \frac{2-1}{2}\int \sin^{2-2}(3x)d(3x)\right] \\
&= \frac{1}{12}\sin^3(3x)\sin(3x) + \left[\frac{1}{8}\sin(3x)\cos(3x) + \frac{1}{8}\int \sin^0(3x)d(3x)\right] \\
&= \frac{1}{12}\sin^3(3x)\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(3x)\cos(3x) + \frac{3x}{8} + c
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5.34 จงหาค่า $\int \cos^5(4x)dx$

วิธีทำ ใช้สูตรลดทอน $\int \cos^n(u)du = \frac{1}{n}\cos^{n-1}u\sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}u\,du$

โดย $u=4x$ ดังนั้น $du=4dx$ เกินมา 4 ปรับค่าโดยการหารด้วย 4 จะได้

$$
\begin{aligned}
\int \cos^5(4x)dx &= \int \cos^5(4x)\frac{4dx}{4} = \frac{1}{4}\int \cos^5(4x)d(4x) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}\cos^{5-1}(4x)\sin(4x) + \frac{5-1}{5}\int \cos^{5-2}(4x)d(4x)\right] \\
&= \frac{1}{20}\cos^4(4x)\sin(4x) + \frac{1}{5}\int \cos^3(4x)d(4x) \\
&= \frac{1}{20}\cos^4(4x)\sin(4x) + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}\cos^{3-1}(4x)\sin(4x) + \frac{3-1}{3}\int \cos^{3-2}(4x)d(4x)\right]
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{20}\cos^4(4x)\sin(4x)+\frac{1}{15}\cos^2(4x)\sin(4x)+\frac{2}{15}\int\cos(4x)d(4x)$$

$$=\frac{1}{20}\cos^4(4x)\sin(4x)+\frac{1}{15}\cos^2(4x)\sin(4x)+\frac{2}{15}\sin(4x)+c$$

หมายเหตุ การหาค่าอินทิกรัล $\int\sin^n(u)du$ หรือ $\int\cos^n(u)du$ โดยใช้สูตรลดทอน กับใช้วิธีแบบกรณีที่ 1 หรือกรณีที่ 2 จะได้คำตอบที่อยู่ในรูปแบบต่างกัน แต่มีค่าเท่ากัน

แบบที่ 2 $\int\sin^m(u)\cos^n(u)du$ การหาค่าอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบนี้แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า m หรือ n เป็นจำนวนคี่บวก (จำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นอะไรก็ตาม) ให้จัดรูปฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตด้วยคุณสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

- ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก ให้เขียน $\sin^m(u)=\sin^{m-1}(u)\sin(u)$ แล้วแทน $\sin^{m-1}(u)$ เป็น $\sin^2(u)=1-\cos^2(u)$ แล้วปรับ du เป็น $d(\cos(u))=-\sin(u)du$
- ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวก ให้เขียน $\cos^n(u)$ ด้วย $\cos^n(u)=\cos^{n-1}(u).\cos(u)$ แล้วแทน $\cos^{n-1}(u)$ เป็น $\cos^2(u)=1-\sin^2(u)$ แล้วปรับ du เป็น $d(\sin(u))=\cos(u)du$

ตัวอย่างที่ 5.35 จงหาค่า $\int\sin^3(2x)\cos^5(2x)dx$

วิธีทำ แทนค่าด้วยคุณสมบัติตรีโกณมิติ $\sin^2(u)=1-\cos^2(u)$ โดย

$$\begin{aligned}
\int\sin^3(2x)\cos^5(2x)dx &= \int\sin^2(2x)\cos^5(2x)\sin(2x)dx \\
&= \int(1-\cos^2(2x))\cos^5(2x)\frac{-2\sin(2x)dx}{-2} \\
&= \frac{-1}{2}\int[(1)\cos^5(2x)-\cos^2(2x)\cos^5(2x)]d\cos(2x) \\
&= \frac{-1}{2}\int[\cos^5(2x)-\cos^7(2x)]d\cos(2x) \\
&= \frac{-1}{2}\int\cos^5(2x)d\cos(2x)+\frac{1}{2}\int\cos^7(2x)d\cos(2x) \\
&= \frac{-\cos^6(2x)}{12}+\frac{\cos^8(2x)}{16}+c
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่บวก ให้ใช้คุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติ แทนค่า $\sin^m(u)\Rightarrow\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ และ $\cos^n(u)\Rightarrow\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

ตัวอย่างที่ 5.36 จงหาค่า $\int \cos^6(3x)\sin^4(3x)dx$

วิธีทำ

$$\int \cos^6(3x)\sin^4(3x)dx = \int \left[\cos^2(3x)\right]^3\left[\sin^2(3x)\right]^2 dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos(6x))\right]^3\left[\frac{1}{2}(1-\cos(6x))\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{32}\int (1+\cos(6x))^3(1-\cos(6x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{32}\int \left(1+3\cos(6x)+3\cos^2(6x)+\cos^3(6x)\right)\left(1-2\cos(6x)+\cos^2(6x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{32}\int [1+3\cos(6x)+3\cos^2(6x)+\cos^3(6x)$$
$$-2\cos(6x)-6\cos^2(6x)-6\cos^3(6x)-2\cos^4(6x)$$
$$+\cos^2(6x)+3\cos^3(6x)+3\cos^4(6x)+\cos^5(6x)]dx$$

$$= \frac{1}{32}\int \left[1+\cos(6x)-2\cos^2(6x)-2\cos^3(6x)+\cos^4(6x)+\cos^5(6x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{32}\left[\int 1dx+\int \cos(6x)dx-\int 2\cos^2(6x)dx - \int 2\cos^3(6x)dx+\int \cos^4(6x)dx+\int \cos^5(6x)dx\right]$$

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้ค่อนข้างยาว แสดงวิธีทำด้วยการแยกอินทิเกรตทีละพจน์แล้วนำมารวมกันอีกที

พจน์ที่ 1 $\frac{1}{32}\int 1dx = \frac{x}{32}+c$

พจน์ที่ 2 $\frac{1}{32}\int \cos(6x)dx = \frac{1}{32}\int \cos(6x)\frac{6dx}{6}$

$$= \frac{1}{192}\int \cos(6x)d(6x) = \frac{\sin(6x)}{192}+c$$

พจน์ที่ 3 $\frac{1}{32}\int 2\cos^2(6x)dx = \frac{2}{32}\int \frac{1}{2}(1+\cos(12x))dx$

$$= \frac{1}{32}\int (1+\cos(12x))dx = \frac{1}{32}\int 1dx+\frac{1}{32}\int \cos(12x)dx$$

$$= \frac{x}{32}+\frac{1}{32}\int \cos(12x)\frac{12dx}{12} = \frac{x}{32}+\frac{1}{384}\int \cos(12x)d(12x)$$

$$= \frac{x}{32}+\frac{\sin(12x)}{384}+c$$

พจน์ที่ 4 $\frac{1}{32}\int 2\cos^3(6x)dx = \frac{2}{32}\int \cos^2(6x)\cos(6x)dx$

$$= \frac{2}{32}\int \left(1-\sin^2(6x)\right)\frac{6\cos(6x)dx}{6}$$

$$= \frac{1}{96}\int \left(1-\sin^2(6x)\right)d\sin(6x)$$

$$= \frac{1}{96}\int 1d\sin(6x) - \frac{1}{96}\int \sin^2(6x)d\sin(6x)$$

$$= \frac{\sin(6x)}{96} - \frac{\sin^3(6x)}{288} + c$$

พจน์ที่ 5 $\frac{1}{32}\int \cos^4(6x)dx = \frac{1}{32}\int \cos^4(6x)\frac{6dx}{6} = \frac{1}{192}\int \cos^4(6x)d(6x)$

$$= \frac{1}{192}\left[\frac{1}{4}\cos^{4-1}(6x)\sin(6x) + \frac{4-1}{4}\int \cos^{4-2}(6x)d(6x)\right]$$

$$= \frac{1}{768}\cos^3(6x)\sin(6x) + \frac{1}{256}\int \cos^2(6x)d(6x)$$

$$= \frac{1}{768}\cos^3(6x)\sin(6x) + \frac{1}{256}\left[\frac{1}{2}\cos(6x)\sin(6x) + \frac{1}{2}\int \cos^0(6x)d(6x)\right]$$

$$= \frac{1}{768}\cos^3(6x)\sin(6x) + \frac{1}{512}\cos(6x)\sin(6x) + \frac{1}{512}\int 1d(6x)$$

$$= \frac{1}{768}\cos^3(6x)\sin(6x) + \frac{1}{512}\cos(6x)\sin(6x) + \frac{x}{512} + c$$

พจน์ที่ 6 $\frac{1}{32}\int \cos^5(6x)dx = \frac{1}{32}\int \cos^5(6x)\frac{6dx}{6} = \frac{1}{192}\int \cos^5(6x)d(6x)$

$$= \frac{1}{192}\left[\frac{1}{5}\cos^{5-1}(6x)\sin(6x) + \frac{5-1}{5}\int \cos^{5-2}(6x)d(6x)\right]$$

$$= \frac{1}{960}\cos^4(6x)\sin(6x) + \frac{1}{240}\int \cos^3(6x)d(6x)$$

$$= \frac{1}{960}\cos^4(6x)\sin(6x) + \frac{1}{240}\left[\frac{1}{3}\cos^2(6x)\sin(6x) + \frac{2}{3}\int \cos(6x)d(6x)\right]$$

$$= \frac{1}{960}\cos^4(6x)\sin(6x) + \frac{1}{720}\cos^2(6x)\sin(6x) + \frac{1}{360}\sin(6x) + c$$

นำผลการอินทิเกรตจากพจน์ที่ 1 ถึง พจน์ที่ 6 รวมกัน จะได้

$$\begin{aligned}\int \sin^3(2x)\cos^5(2x)dx &= \frac{x}{32} + \frac{\sin(6x)}{192} + \frac{x}{32} + \frac{\sin(12x)}{384} + \frac{\sin(6x)}{96} - \frac{\sin^3(6x)}{288} \\ &+ \frac{1}{768}\cos^3(6x)\sin(6x) + \frac{1}{512}\cos(6x)\sin(6x) + \frac{x}{512} \\ &+ \frac{1}{960}\cos^4(6x)\sin(6x) + \frac{1}{720}\cos^2(6x)\sin(6x) + \frac{\sin(6x)}{360} + c\end{aligned}$$

NPRU

$$=\frac{33x}{512}+\frac{53\sin(6x)}{2880}+\frac{\sin(12x)}{384}-\frac{\sin^3(6x)}{288}+\frac{1}{768}\cos^3(6x)\sin(6x)$$

$$+\frac{1}{512}\cos(6x)\sin(6x)+\frac{1}{960}\cos^4(6x)\sin(6x)+\frac{1}{720}\cos^2(6x)\sin(6x)+c$$

แบบที่ 3 $\int\sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int\sin(mx)\sin(nx)dx$ และ $\int\cos(mx)\cos(nx)dx$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนใด ๆ การหาค่าอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถแทนด้วยคุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อเปลี่ยนผลคูณเป็นผลบวกหรือผลต่าง ตามคุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

- $\sin(A)\cos(B)=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$
- $\sin(A)\sin(B)=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$
- $\cos(A)\cos(B)=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\cos(A-B)]$

ตัวอย่างที่ 5.37 จงหาค่า $\int\cos(3x)\sin(2x)dx$

วิธีทำ แทนค่าด้วยคุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้

$$\begin{aligned}\int\sin(2x)\cos(3x)dx &= \int\frac{1}{2}[\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)]dx\\ &= \int\frac{1}{2}[\sin(5x)+\sin(-x)]dx\\ &= \frac{1}{2}\int\sin(5x)dx+\frac{1}{2}\int-\sin(x)dx\\ &= \frac{1}{2}\int\sin(5x)\frac{5dx}{5}-\frac{1}{2}\int\sin(x)dx\\ &= \frac{1}{10}\int\sin(5x)d(5x)+\frac{1}{2}\cos(x)\\ &= -\frac{1}{10}\cos(5x)+\frac{1}{2}\cos(x)+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.38 จงหาค่า $\int e^x\sin(3e^x)\sin(2e^x)dx$

วิธีทำ

แทนค่าด้วยคุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้

$$\begin{aligned}\int e^x\sin(3e^x)\sin(2e^x)dx &= \int\frac{-1}{2}[\cos(3e^x+2e^x)-\cos(3e^x-2e^x)](e^x)dx\\ &= \frac{-1}{2}\int[\cos(5e^x)-\cos(e^x)](e^x)dx\end{aligned}$$

NPRU

$$= \frac{-1}{2}\int \cos\left(5e^x\right)\frac{5e^x dx}{5} + \frac{1}{2}\int \cos\left(e^x\right)\left(e^x\right)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\int \cos\left(5e^x\right)d\left(5e^x\right) + \frac{1}{2}\int \cos\left(e^x\right)d\left(e^x\right)$$

$$= \frac{-1}{10}\sin\left(5e^x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(e^x\right) + c$$

แบบที่ 4 $\int \tan^n(u)du$ และ $\int \cot^n(u)du$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเป็นจำนวนคู่บวกหรือจำนวนคี่บวกก็ได้ ซึ่งมีวิธีหาค่าอินทิกรัลนี้ได้ 2 วิธีดังนี้

วิธีที่ 1

หาค่า $\int \tan^n(u)du$ ให้เขียน $\tan^n(u) = \tan^{n-2}(u)\tan^2(u)$ แล้วแทนค่า $\tan^2(u)$ ด้วยคุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ $\tan^2(u) = \sec^2(u) - 1$ และใช้ปรับค่า du ด้วย $d\tan(u) = \sec^2(u)du$

หาค่า $\int \cot^n(u)du$ ให้เขียน $\cot^n(u) = \cot^{n-2}(u)\cot^2(u)$ แล้วแทนค่า $\cot^2(u)$ ด้วยคุณสมบัติฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ $\cot^2(u) = \operatorname{cosec}^2(u) - 1$ และใช้ปรับค่า du ด้วย $d\cot(u) = \operatorname{cosec}^2(u)du$

ตัวอย่างที่ 5.39 จงหาค่า $\int \tan^5(x)dx$

วิธีทำ

$$\int \tan^5(x)dx = \int \tan^{5-2}(x)\tan^2(x)dx$$

$$= \int \tan^3(x)\left(\sec^2(x) - 1\right)dx$$

$$= \int \left[\tan^3(x)\sec^2(x) - \tan^3(x)\right]dx$$

$$= \int \tan^3(x)\sec^2(x)dx - \int \tan^3(x)dx$$

$$= \int \tan^3(x)d\tan(x) - \int \tan(x)\tan^2(x)dx$$

$$= \frac{\tan^4(x)}{4} - \int \tan(x)\left(\sec^2(x) - 1\right)dx$$

$$= \frac{\tan^4(x)}{4} - \int \tan(x)\sec^2(x)dx + \int \tan(x)dx$$

$$= \frac{\tan^4(x)}{4} - \int \tan(x)d\tan(x) + \ln\left|\sec(x)\right|$$

$$= \frac{\tan^4(x)}{4} - \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln\left|\sec(x)\right| + c$$

ตัวอย่างที่ 5.40 จงหาค่า $\int \cot^6(2x)dx$

วิธีทำ

$$\int \cot^6(2x)dx = \int \cot^4(2x)\cot^2(2x)dx$$
$$= \int \cot^4(2x)\left(\operatorname{cosec}^2(2x)-1\right)dx$$
$$= \int \left[\cot^4(2x)\operatorname{cosec}^2(2x)-\cot^4(2x)\right]dx$$
$$= \int \cot^4(2x)\operatorname{cosec}^2(2x)dx - \int \cot^4(2x)dx$$
$$= \int \cot^4(2x)\frac{-2\operatorname{cosec}^2(2x)dx}{2} - \int \cot^2(2x)\cot^2(2x)dx$$
$$= \frac{-1}{2}\int \cot^4(2x)d\cot(2x) - \int \cot^2(2x)\left(\operatorname{cosec}^2(2x)-1\right)dx$$
$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) - \int \left[\cot^2(2x)\operatorname{cosec}^2(2x)-\cot^2(2x)\right]dx$$
$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) - \int \cot^2(2x)\frac{-2\operatorname{cosec}^2(2x)dx}{2} + \int \left(\operatorname{cosec}^2(2x)-1\right)dx$$
$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) + \int \operatorname{cosec}^2(2x)\frac{2dx}{2} - x$$
$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) + \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2(2x)d(2x) - x$$
$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) - \frac{1}{2}\cot(2x) - 2x + c$$

วิธีที่ 2 ใช้สูตรลดทอน ดังนี้

- $\int \tan^n(u)du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(u) - \int \tan^{n-2}(u)du$ เมื่อ $n \geq 2$
- $\int \cot^n(u)du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}(u) - \int \cot^{n-2}(u)du$ เมื่อ $n \geq 2$

ตัวอย่างที่ 5.41 จงหาค่า $\int \cot^6(2x)dx$

วิธีทำ ใช้สูตรลดทอน จะได้

$$\int \cot^6(2x)dx = \int \cot^6(2x)\frac{2dx}{2} = \frac{1}{2}\int \cot^6(2x)d(2x)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{6-1}\cot^{6-1}(2x) - \int \cot^{6-2}(2x)d(2x)\right]$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) - \frac{1}{2}\int \cot^4(2x)d(2x)$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}\cot^3(2x) - \int \cot^2(2x)d(2x)\right]$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) + \frac{1}{2}\int \cot^2(2x)d(2x)$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1}\cot(2x) - \int \cot^0(2x)d(2x)\right]$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) - \frac{1}{2}\cot(2x) - \int 1d(2x)$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^5(2x) + \frac{1}{6}\cot^3(2x) - \frac{1}{2}\cot(2x) - 2x + c$$

ตัวอย่างที่ 5.42 จงหาค่า $\int \tan^5(x)dx$

วิธีทำ ใช้สูตรลดทอน จะได้

$$\int \tan^5(x)dx = \frac{1}{4}\tan^4(x) - \int \tan^3(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4(x) - \frac{1}{2}\tan^2(x) + \int \tan(x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4(x) - \frac{1}{2}\tan^2(x) + \ln|\sec(x)| + c$$

แบบที่ 5 $\int \sec^n(u)du$ และ $\int \mathrm{cosec}^n(u)du$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก สามารถหาค่าอินทิกรัลได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก สามารถหาค่าอินทิกรัลได้ 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1

- หาค่า $\int \sec^n(u)du$ ให้เขียน $\sec^n(u) = \sec^{n-2}(u)\sec^2(u)$ แล้วแทนค่าคุณสมบัติตรีโกณมิติด้วย $\sec^2(u) = 1 + \tan^2(u)$ และปรับค่า du เป็น $d\tan(u) = \sec^2(u)du$

- หาค่า $\int \mathrm{cosec}^n(u)du$ ให้เขียน $\sec^n(u) = \mathrm{cosec}^{n-2}(u)\mathrm{cosec}^2(u)$ แล้วแทนค่าคุณสมบัติตรีโกณมิติด้วย $\mathrm{cosec}^2(u) = 1 + \cot^2(u)$ และปรับค่า du เป็น $d\cot(u) = \mathrm{cosec}^2(u)du$

วิธีที่ 2

- $\int \sec^n(u)du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(u)\tan(u) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(u)du$ เมื่อ $n > 2$

- $\int \mathrm{cosec}^n(u)du = -\frac{1}{n-1}\mathrm{cosec}^{n-2}(u)\cot(u) + \frac{n-2}{n-1}\int \mathrm{cosec}^{n-2}(u)du$ เมื่อ $n > 2$

NPRU

ตัวอย่างที่ 5.43 จงหาค่า $\int \sec^6(2x)dx$

วิธีทำ ใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติ จะได้

$$
\begin{aligned}
\int \sec^6(2x)dx &= \int \sec^{6-2}(2x)\sec^2(2x)dx \\
&= \int \sec^4(2x)\sec^2(2x)dx \\
&= \int \left(1+\tan^2(2x)\right)^2 \sec^2(2x)dx \\
&= \int \left[1+2\tan^2(2x)+\tan^4(2x)\right]\sec^2(2x)d(x) \\
&= \int \left[1+2\tan^2(2x)+\tan^4(2x)\right]\frac{2\sec^2(2x)d(x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int \left[1+2\tan^2(2x)+\tan^4(2x)\right]2\sec^2(2x)d(x) \\
&= \frac{1}{2}\int \left[1+2\tan^2(2x)+\tan^4(2x)\right]d\tan(2x) \\
&= \frac{1}{2}\int 1d\tan(2x)+\int \tan^2(2x)d\tan(2x)+\frac{1}{2}\int \tan^4(2x)d\tan(2x) \\
&= \frac{1}{2}\tan(2x)+\frac{\tan^3(2x)}{3}+\frac{1}{10}\tan^5(2x)+c
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5.44 จงหาค่า $\int \operatorname{cosec}^6(3x)dx$

วิธีทำ ใช้สูตรลดทอน และปรับค่า du ก่อน จะได้

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{cosec}^6(3x)dx &= \int \operatorname{cosec}^6(3x)\frac{3dx}{3} = \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}^6(3x)3dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}^6(3x)d(3x) \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{6-1}\operatorname{cosec}^{6-2}(3x)\cot(3x)+\frac{6-2}{6-1}\int \operatorname{cosec}^{6-2}(3x)d(3x)\right] \\
&= \frac{-1}{15}\operatorname{cosec}^4(3x)\cot(3x)+\frac{4}{15}\int \operatorname{cosec}^4(3x)d(3x) \\
&= \frac{-1}{15}\operatorname{cosec}^4(3x)\cot(3x)+\frac{4}{15}\left[\frac{-1}{3}\operatorname{cosec}^2(3x)\cot(3x)+\frac{2}{3}\int \operatorname{cosec}^2(3x)d(3x)\right] \\
&= \frac{-1}{15}\operatorname{cosec}^4(3x)\cot(3x)-\frac{4}{45}\operatorname{cosec}^2(3x)\cot(3x)+\frac{2}{45}\cot(3x)+c
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 การหาค่า $\int \sec^n(u)du$ และ $\int \operatorname{cosec}^n(u)du$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก จะใช้สูตรลดทอนข้างต้นตามวิธีที่ 2 ในกรณีที่ 1

ตัวอย่างที่ 5.45 จงหาค่า $\int \sec^5(3x)dx$

วิธีทำ

จากโจทย์ $\int \sec^5(3x)dx$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก ใช้สูตรลดทอน

$$\int \sec^n(u)du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(u)\tan(u)+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(u)du$$

และต้องปรับค่า du ก่อน จะได้

$$\int \sec^5(3x)dx = \int \sec^5(3x)\frac{3dx}{3} = \frac{1}{3}\int \sec^5(3x)3dx = \frac{1}{3}\int \sec^5(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5-1}\sec^{5-2}(3x)\tan(3x)+\frac{5-2}{5-1}\int \sec^{5-2}(3x)d(3x)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\sec^3(3x)\tan(3x)+\frac{3}{4}\int \sec^3(3x)d(3x)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\sec^3(3x)\tan(3x)+\frac{3}{12}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{12}\sec^3(3x)\tan(3x)+\frac{3}{12}\left[\frac{1}{2}\sec(3x)\tan(3x)+\frac{1}{2}\int \sec(3x)d(3x)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\sec^3(3x)\tan(3x)+\frac{1}{8}\sec(3x)\tan(3x)+\frac{1}{8}\ln\left|\sec(3x)+\tan(3x)\right|+c$$

แบบที่ 6 $\int \tan^m(u)\sec^n(u)du$ และ $\int \cot^m(u)\mathrm{cosec}^n(u)du$ แบ่งออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก และ m เป็นจำนวนอะไรก็ได้ มีวิธีการหาค่าอินทิกรัลดังนี้

- ถ้าจะหาค่า $\int \tan^m(u)\sec^n(u)du$ ให้ใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่า $\int \sec^n(u)du$

- ถ้าจะหาค่า $\int \cot^m(u)\mathrm{cosec}^n(u)du$ ให้ใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่า $\int \mathrm{cosec}^n(u)du$ ในแบบที่ 5 กรณีที่ 1 วิธีที่ 1 เมื่อ ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวก

ตัวอย่างที่ 5.46 จงหาค่า $\int \tan^3(3x)\sec^4(3x)dx$

วิธีทำ

ให้ใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่า $\int \sec^n(u)du$ ในแบบที่ 5 วิธีที่ 1 ดังนี้

$$\int \tan^3(3x)\sec^4(3x)dx = \int \tan^3(3x)\sec^2(3x)\sec^2(3x)dx$$

$$= \int \tan^3(3x)\left(1+\tan^2(3x)\right)\sec^2(3x)dx$$

$$=\int\left(\tan^3(3x)+\tan^5(3x)\right)\frac{3\sec^2(3x)dx}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\int\tan^3(3x)d\tan(3x)+\frac{1}{3}\int\tan^5(3x)d\tan(3x)$$

$$=\frac{1}{12}\tan^4(3x)+\frac{1}{18}\tan^6(3x)+c$$

ตัวอย่างที่ 5.47 จงหาค่า $\int\cot^3(2x)\operatorname{cosec}^6(2x)dx$

วิธีทำ

ให้ใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่า $\int\sec^n(u)du$ ในแบบที่ 5 วิธีที่ 1 ดังนี้

$$\int\cot^3(2x)\operatorname{cosec}^6(2x)dx=\int\cot^3(2x)\operatorname{cosec}^4(2x)\operatorname{cosec}^2(2x)dx$$

$$=\int\cot^3(2x)\left[\operatorname{cosec}^2(2x)\right]^2\operatorname{cosec}^2(2x)dx$$

$$=\int\cot^3(2x)\left[1+\cot^2(2x)\right]^2\frac{-2\operatorname{cosec}^2(2x)dx}{2}$$

$$=\frac{-1}{2}\int\cot^3(2x)\left[1+2\cot^2(2x)+\cot^4(2x)\right]2\operatorname{cosec}^2(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{2}\int\left[\cot^3(2x)+2\cot^5(2x)+\cot^7(2x)\right]d\cot(2x)$$

$$=\frac{-1}{2}\int\cot^3(2x)d\cot(2x)-\frac{1}{2}\int2\cot^5(2x)d\cot(2x)$$

$$-\frac{1}{2}\int\cot^7(2x)d\cot(2x)$$

$$=\frac{-1}{8}\cot^4(2x)-\frac{1}{6}\cot^6(2x)-\frac{1}{16}\cot^8(2x)+c$$

กรณีที่ 2 ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนอะไรก็ได้ มีวิธีการหาค่าอินทิกรัลดังนี้

- ถ้าจะหาค่า $\int\tan^m(u)\sec^n(u)du$ ให้เขียน $\tan^m(u)=\tan^{m-1}(u)\tan(u)$ และ $\sec^n(u)=\sec^{n-1}(u)\sec(u)$ ให้แทนค่า $\tan^{m-1}(u)=\tan^2(u)=\sec^2(u)-1$ แล้วปรับค่า du เป็น $d\sec(u)=\sec(u)\tan(u)du$

- ถ้าจะหาค่า $\int\cot^m(u)\operatorname{cosec}^n(u)du$ ให้เขียน $\cot^m(u)=\cot^{m-1}(u)\cot(u)$ และ $\operatorname{cosec}^n(u)=\operatorname{cosec}^{n-1}(u)\operatorname{cosec}(u)$ ให้แทนค่า $\cot^m(u)=\cot^2(u)=\operatorname{cosec}^2(u)-1$ แล้วปรับค่า du เป็น $d\operatorname{cosec}(u)=-\operatorname{cosec}(u)\cot(u)du$

NPRU

ตัวอย่างที่ 5.48 จงหาค่า $\int \cot^3(2x)\operatorname{cosec}^6(2x)dx$

วิธีทำ $\int \cot^3(2x)\operatorname{cosec}^6(2x)dx = \int \cot^2(2x)\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)\operatorname{cosec}(2x)dx$

$$= \int \left(\operatorname{cosec}^2(2x)-1\right)\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)\operatorname{cosec}(2x)dx$$

$$= \int \left(\operatorname{cosec}^7(2x)-\operatorname{cosec}^5(2x)\right)\frac{-2\operatorname{cosec}(2x)\cot(2x)dx}{2}$$

$$= \frac{-1}{2}\int \left(\operatorname{cosec}^7(2x)-\operatorname{cosec}^5(2x)\right)2\operatorname{cosec}(2x)\cot(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \left(\operatorname{cosec}^7(2x)-\operatorname{cosec}^5(2x)\right)d\operatorname{cosec}(2x)$$

$$= \frac{-1}{2}\int \operatorname{cosec}^7(2x)d\operatorname{cosec}(2x)+\frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^5(2x)d\operatorname{cosec}(2x)$$

$$= \frac{-1}{16}\operatorname{cosec}^8(2x)+\frac{1}{12}\operatorname{cosec}^6(2x)+c$$

ตัวอย่างที่ 5.49 จงหาค่า $\int \tan^3(3x)\sec^4(3x)dx$

วิธีทำ $\int \tan^3(3x)\sec^4(3x)dx = \int \tan^2(3x)\sec^3(3x)\tan(3x)\sec(3x)dx$

$$= \int \left(\sec^2(3x)-1\right)\sec^3(3x)\sec(3x)\tan(3x)dx$$

$$= \int \left(\sec^5(3x)-\sec^3(3x)\right)\frac{3\sec(3x)\tan(3x)dx}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\sec^5(3x)-\sec^3(3x)\right)3\sec(3x)\tan(3x)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\sec^5(3x)-\sec^3(3x)\right)d\sec(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^5(3x)d\sec(3x)-\frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d\sec(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^6(3x)-\frac{1}{12}\sec^4(3x)+c$$

กรณีที่ 3 ถ้า m เป็นจำนวนคู่บวก และ n เป็นจำนวนคี่บวก มีวิธีการหาค่าอินทิกรัล ดังนี้

- ถ้าจะหาค่า $\int \tan^m(u)\sec^n(u)du$ ให้เขียนแทนค่า $\tan^m(u)=\tan^2(u)=\sec^2(u)-1$ แล้วหาค่าอินทิกรัลแบบแยกอินทิเกรตทีละตัว โดยแต่ละอินทิกรัลให้ใช้วิธีการหาค่าอินทิเกรตแบบลดทอน

- ถ้าจะหาค่า $\int \cot^m(u)\operatorname{cosec}^n(u)du$ ให้เขียนแทนค่า $\cot^m(u)=\cot^2(u)=\operatorname{cosec}^2(u)-1$ แล้วหาค่าอินทิกรัลแบบแยกอินทิเกรตทีละตัว โดยแต่ละอินทิกรัลให้ใช้วิธีการหาค่าอินทิเกรตแบบลดทอน

ตัวอย่างที่ 5.50 จงหาค่า $\int \tan^4(3x)\sec^3(3x)dx$

วิธีทำ $\int \tan^4(3x)\sec^3(3x)dx = \int [\tan^2(3x)]^2\sec^3(3x)dx = \int [\sec^2(3x)-1]^2\sec^3(3x)dx$

$$= \int [\sec^4(3x)-2\sec^2(3x)+1]\sec^3(3x)dx$$

$$= \int [\sec^7(3x)-2\sec^5(3x)+\sec^3(3x)]dx$$

$$= \int \sec^7(3x)dx - 2\int \sec^5(3x)dx + \int \sec^3(3x)dx$$

$$= \int \sec^7(3x)\frac{3dx}{3} - 2\int \sec^5(3x)\frac{3dx}{3} + \int \sec^3(3x)\frac{3dx}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^7(3x)d(3x) - \frac{2}{3}\int \sec^5(3x)d(3x) + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}\sec^5(3x)\tan(3x) + \frac{5}{6}\int \sec^5(3x)d(3x)\right] - \frac{2}{3}\int \sec^5(3x)d(3x) + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) + \frac{5}{18}\int \sec^5(3x)d(3x) - \frac{2}{3}\int \sec^5(3x)d(3x) + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) + \left(\frac{5}{18}-\frac{2}{3}\right)\int \sec^5(3x)d(3x) + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{18}\int \sec^5(3x)d(3x) + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{18}\left[\frac{1}{4}\sec^3(3x)\tan(3x) + \frac{3}{4}\int \sec^3(3x)d(3x)\right] + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{72}\sec^3(3x)\tan(3x) - \frac{7}{24}\int \sec^3(3x)d(3x) + \frac{1}{3}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{72}\sec^3(3x)\tan(3x) + \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{24}\right)\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{72}\sec^3(3x)\tan(3x) + \frac{1}{24}\int \sec^3(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{72}\sec^3(3x)\tan(3x) + \frac{1}{24}\left[\frac{1}{2}\sec(3x)\tan(3x) + \frac{1}{2}\int \sec^3(3x)d(3x)\right]$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{72}\sec^3(3x)\tan(3x) + \frac{1}{48}\sec(3x)\tan(3x) + \frac{1}{48}\int \sec(3x)d(3x)$$

$$= \frac{1}{18}\sec^5(3x)\tan(3x) - \frac{7}{72}\sec^3(3x)\tan(3x) + \frac{1}{48}\sec(3x)\tan(3x) + \frac{1}{48}\ln\left|\sec(3x)+\tan(3x)\right| + c$$

NPRU

ตัวอย่างที่ 5.51 จงหาค่า $\int \cot^{6}(2x)\operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$

วิธีทำ $\int \cot^{6}(2x)\operatorname{cosec}^{3}(2x)dx = \int \left[\cot^{2}(2x)\right]^{4}\operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$

$$= \int \left[\operatorname{cosec}^{2}(2x)-1\right]^{4}\operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \int \left[\operatorname{cosec}^{8}(2x)-4\operatorname{cosec}^{6}(3x)+6\operatorname{cosec}^{4}(3x)-4\operatorname{cosec}^{2}(3x)+1\right]\operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \int \left[\operatorname{cosec}^{11}(2x)-4\operatorname{cosec}^{9}(3x)+6\operatorname{cosec}^{7}(3x)-4\operatorname{cosec}^{5}(3x)+\operatorname{cosec}^{3}(2x)\right]dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^{11}(2x)dx - 4\int \operatorname{cosec}^{9}(3x)dx + 6\int \operatorname{cosec}^{7}(3x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \left[\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) + \frac{9}{10}\int \operatorname{cosec}^{9}(2x)dx\right] - 4\int \operatorname{cosec}^{9}(3x)dx + 6\int \operatorname{cosec}^{7}(3x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) + \left(\frac{9}{10}-4\right)\int \operatorname{cosec}^{9}(2x)dx + 6\int \operatorname{cosec}^{7}(3x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) - \frac{31}{10}\int \operatorname{cosec}^{9}(2x)dx + 6\int \operatorname{cosec}^{7}(3x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) - \frac{31}{10}\left[\frac{-1}{8}\operatorname{cosec}^{7}(2x)\cot(2x) + \frac{7}{8}\int \operatorname{cosec}^{7}(2x)dx\right] + 6\int \operatorname{cosec}^{7}(3x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) + \frac{31}{80}\operatorname{cosec}^{7}(2x)\cot(2x) - \frac{217}{80}\int \operatorname{cosec}^{7}(2x)dx + 6\int \operatorname{cosec}^{7}(3x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) + \frac{31}{80}\operatorname{cosec}^{7}(2x)\cot(2x) + \left(6-\frac{217}{80}\right)\int \operatorname{cosec}^{7}(2x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$= \frac{-1}{10}\operatorname{cose}^{9}(2x)\cot(2x) + \frac{31}{80}\operatorname{cosec}^{7}(2x)\cot(2x) + \left(6-\frac{217}{80}\right)\int \operatorname{cosec}^{7}(2x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^{5}(3x)dx + \int \operatorname{cosec}^{3}(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)+\frac{263}{80}\int \operatorname{cosec}^7(2x)dx$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^5(3x)dx+\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)+\frac{263}{80}\left[\frac{-1}{6}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)+\frac{5}{6}\int \operatorname{cosec}^5(2x)dx\right]$$
$$-4\int \operatorname{cosec}^5(3x)dx+\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)$$
$$+\left(\frac{263}{96}-4\right)\int \operatorname{cosec}^5(2x)dx+\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)$$
$$-\frac{121}{96}\int \operatorname{cosec}^5(2x)dx+\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)+\frac{121}{384}\operatorname{cosec}^3(2x)\cot(2x)$$
$$-\frac{121}{128}\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx+\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)+\frac{121}{384}\operatorname{cosec}^3(2x)\cot(2x)$$
$$+\left(-\frac{121}{128}+1\right)\int \operatorname{cosec}^3(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)+\frac{121}{384}\operatorname{cosec}^3(2x)\cot(2x)$$
$$+\frac{7}{128}\left[\frac{-1}{2}\operatorname{cosec}(2x)\cot(2x)+\frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}(2x)dx\right]$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)+\frac{121}{384}\operatorname{cosec}^3(2x)\cot(2x)$$
$$-\frac{7}{256}\operatorname{cosec}(2x)\cot(2x)+\frac{7}{256}\int \operatorname{cosec}(2x)dx$$

$$=\frac{-1}{10}\operatorname{cose}^9(2x)\cot(2x)+\frac{31}{80}\operatorname{cosec}^7(2x)\cot(2x)-\frac{263}{480}\operatorname{cosec}^5(2x)\cot(2x)+\frac{121}{384}\operatorname{cosec}^3(2x)\cot(2x)$$
$$-\frac{7}{256}\operatorname{cosec}(2x)\cot(2x)+\frac{7}{256}\ln\left|\operatorname{cosec}(2x)-\cot(2x)\right|+c$$

คำถามท้ายบท

จงหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\int \left(1+2x+3x^3-\frac{4x^3}{3}\right)dx$

2. $\int (1+2x)(3x^2-6)dx$

3. $\int \sqrt{4x}\left(3x^2-6\sqrt{x}+3x-\sqrt[3]{x}\right)dx$

4. $\int (1+2x)^3 dx$

5. $\int (2x^2-1)^8 dx$

6. $\int 3x^3(x^4+1)^7 dx$

7. $\int \sqrt{\tan(3x)}\sec^2(3x)dx$

8. $\int \frac{\operatorname{arcsec}(3x)}{(3x)\sqrt{9x^2-1}}dx$

9. $\int \left(\frac{2x^5-x^4+3x^3+2x-1}{x^4-2x^3+1}\right)dx$

10. $\int \frac{\operatorname{arccosec}(2x)}{x\sqrt{4x^2-1}}dx$

จงหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึมต่อไปนี้

1. $\int \frac{1}{(10x-1)}dx$

2. $\int \frac{x}{(2x^2+10)}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sec(2x)-\tan(2x)}$

4. $\int \frac{(2x+5)}{(2x^2+10x-3)}dx$

6. $\int \frac{e^{3x}+2}{e^{3x}-5}dx$

7. $\int \frac{x^2 e^{x^3}}{e^{3x}+4}dx$

8. $\int \frac{x^2-6x+9}{2x-6}dx$

9. $\int \frac{\tan(2x)}{\ln(\sin 2x)}dx$

10. $\int \left(\frac{2}{x-2}-\frac{3}{3x-1}+\frac{4}{2x+5}\right)dx$

จงหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันแบบชี้กำลังต่อไปนี้

1. $\int x^2 e^{2x^3+2}dx$

2. $\int \frac{3}{2e^{2x}}dx$

3. $\int x^2 4^{x^3}dx$

4. $\int e^{(\cos 2x)}\sin(2x)dx$

5. $\int \frac{x^3}{e^{x^4+4}}dx$

6. $\int (3x^2+2)e^{2x^3+4x+5}dx$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{e^{2-x^4}}}dx$

8. $\int \frac{e^{\sqrt{3x+4}}}{\sqrt{3x+4}}dx$

9. $\int \sin(2x)e^{1-2\sin^2 x}dx$

10. $\int \operatorname{cosec}^2(x)\cot(x)e^{\cot^2(x)}dx$

จงหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันแบบตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx$
2. $\int x^3 \cot(x^4 - 1)dx$
3. $\int \frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$
4. $\int e^{4x} \sin(e^{4x})dx$
5. $\int \frac{dx}{1-\sec(x)}$
6. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2(\ln x)}{x}dx$
7. $\int \frac{\cot(2x)}{\sin(2x)}dx$
8. $\int \frac{\sec(3x)\sin(3x)}{\cos(3x)}dx$
9. $\int \frac{1-\sin(3x)}{\tan(3x)}dx$
10. $\int (\cos(x)-\sin(x))^2 dx$

จงหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีผลเฉลยอยู่ในรูปของตรีโกณมิติผกผันต่อไปนี้

1. $\int \frac{3dx}{\sqrt{2}x^2+9}$
2. $\int \frac{dy}{\sqrt{4-16y^2}}$
3. $\int \sqrt{5+9x^2}dx$
4. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 9)}$
5. $\int \frac{\cos\theta d\theta}{16-\sin^2\theta}$
6. $\int \frac{8dx}{x\left(\sqrt{25x^2-1}\right)}$

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4 - 2}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{2x+9}}$

9. $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 + 1} dx$

10. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 6}} dx$

จงหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังต่อไปนี้

1. $\int \sin^4(2\theta) d\theta$
2. $\int \cos^5(x) dx$
3. $\int \sin^7(2x)\cos^5(2x) dx$
4. $\int \sin^4(2x)\cos^6(2x) dx$
5. $\int \sin(5x)\cos(2x) dx$
6. $\int e^x \cos(5e^x)\cos(3e^x) dx$
7. $\int \sin(5x)\cos(7x) dx$
8. $\int \tan^4(5x) dx$
9. $\int \cot^6(3x) dx$
10. $\int \operatorname{cosec}^6\left(\frac{3x}{2}\right) dx$
11. $\int \sec^5(3x) dx$
12. $\int \tan^4(3x)\sec^5(3x) dx$
13. $\int \cot^6(3x)\operatorname{cosec}^5(3x) dx$
14. $\int \tan^7(5\theta) d\theta$
15. $\int \sin^7(2\theta)\cos^3(2\theta) d\theta$