



Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Telecommunications Engineering

Faculty of Science and Technology

Nakhon Pathom Rajabhat University

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



5.5 การอินทิเกรตแบบจำกัดเขตและการประยุกต์

การอินทิเกรตแบบจำกัดเขต (definite integral) ใช้สำหรับหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง หาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง หาความยาวของเส้นโค้ง หาจุดรวมมวล เป็นต้น นิยามโดยให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันมีค่าในช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ หาค่าได้ กล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x)$ หาค่าอินทิเกรตได้ในช่วง $[a, b]$ และจะเรียกค่าลิมิตนี้ว่า อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ จาก a ถึง b และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x) dx$ นั่นคือ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (5.1)$$

จาก $\int_a^b f(x) dx$ เรียก $f(x)$ ฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรต

a ลิมิตล่าง (lower limit) ของการอินทิเกรต

b ลิมิตบน (upper limit) ของการอินทิเกรต

คุณสมบัติของการอินทิเกรตจำกัดเขต กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$

1. ถ้า $a > b$ แล้วจะได้ $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ ถ้า $\int_b^a f(x) dx$ หาค่าได้
2. $\int_a^a f(x) dx = 0$ ถ้า $f(a)$ หาค่าได้
3. $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
5. $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ เมื่อ $f(x) \geq 0$ ทุกค่าของ $x \in [a, b]$
6. $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ เมื่อ $f(x) \leq g(x)$ ทุกค่าของ $x \in [a, b]$
7. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดซึ่งมีสามจุดคือ a, b, c

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



5.5.1 การหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$

ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus) กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ $f(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $F'(x) = f(x)$ ทุกค่าของ $x \in [a,b]$ แล้วจะได้

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (5.2)$$

ตัวอย่างที่ 5.67 จงหาค่า $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int_0^1 (x^3 - 2x + 1)dx &= \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 2x dx + \int_0^1 1 dx \\ &= \left(\frac{x^4}{4} \right)_0^1 - \left(\frac{2x^2}{2} \right)_0^1 + (x)_0^1 \\ &= \left(\frac{1^4 - 0^4}{4} \right) - (1^2 - 0^2) + (1 - 0) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right) - (1) + (1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.68 จงหาค่า $\int_1^3 (x+1)e^{(x^2+2x)} dx$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \int_1^3 (x+1)e^{(x^2+2x)} dx &= \int_1^3 e^{(x^2+2x)} (x+1) dx \\ &= \int_1^3 e^{(x^2+2x)} \frac{2(x+1)dx}{2} = \int_1^3 e^{(x^2+2x)} \frac{(2x+2)dx}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 e^{(x^2+2x)} (2x+2) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 e^{(x^2+2x)} d(x^2+2x) \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{(x^2+2x)} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[e^{(3^2+2(3))} - e^{(1^2+2(1))} \right] \\ &= \frac{1}{2} [e^{(15)} - e^{(5)}] = \frac{e^3}{2} [e^{12} - 1] \end{aligned}$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ตัวอย่างที่ 5.69 จงหาค่า $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos(\theta)} \sin^3(\theta) d\theta$

วิธีทำ $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos(\theta)} \sin^3(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{1/3}(\theta) \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{1/3}(\theta) (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^{1/3}(\theta) - \cos^{7/3}(\theta) \cos^2(\theta)) \frac{-\sin(\theta) d\theta}{-1}$$

$$= - \int_0^{\pi/2} (\cos^{1/3}(\theta) - \cos^{7/3}(\theta)) [-\sin(\theta) d\theta]$$

$$= - \int_0^{\pi/2} (\cos^{1/3}(\theta) - \cos^{7/3}(\theta)) d\cos(\theta)$$

$$= - \int_0^{\pi/2} \cos^{1/3}(\theta) d\cos(\theta) + \int_0^{\pi/2} \cos^{7/3}(\theta) d\cos(\theta)$$

$$= - \left(\frac{3\cos^{4/3}(\theta)}{4} \right)_0^{\pi/2} + \left(\frac{3\cos^{10/3}(\theta)}{10} \right)_0^{\pi/2}$$

$$= \left[-\frac{3\cos^{4/3}(\pi/2)}{4} + \frac{3\cos^{4/3}(0)}{4} \right] + \left[\frac{3\cos^{10/3}(\pi/2)}{10} - \frac{3\cos^{10/3}(0)}{10} \right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{10} = \frac{30-12}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

ตัวอย่างที่ 5.70 จงหาค่า $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} = \int_1^{16} \frac{dx}{x^{1/4} + x^{1/2}}$$

กำหนดให้ $x = z^4$ ซึ่ง $n = 4$ เป็น ค.ร.น. ของ $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ จะได้ $x = z^4$

หา dx ; $dx = \frac{d}{dz}(z^4) 4z^3 dz$

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



$$\begin{aligned}\text{แทนค่า } \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \int_1^{16} \frac{4z^3 dz}{(z^4)^{1/2} + (z^4)^{1/4}} = 4 \int_1^{16} \frac{z^3 dz}{z + z^2} \\ &= 4 \int_1^{16} \frac{z^2 dz}{1+z} = 4 \int_1^{16} \frac{z^2 dz}{z+1} \\ \text{หารยาว จะได้} &= 4 \int_1^{16} \left((z-1) + \frac{1}{(z+1)} \right) dz \\ &= 4 \int_1^{16} (z-1) dz + 4 \int_1^{16} \left(\frac{1}{z+1} \right) dz \\ &= 4 \left[\frac{z^2}{2} - z \right]_1^{16} + 4 \ln|z+1|_1^{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{แทนค่าตัวแปรกลับ } x=z^4 \text{ จะได้ } z=x^{1/4} \\ &= 4 \left[\frac{(x^{1/4})^2}{2} - x^{1/4} \right]_1^{16} + 4 \ln|x^{1/4}+1|_1^{16} \\ &= 4 \left[\frac{x^{1/2}}{2} - x^{1/4} \right]_1^{16} + 4 \ln|x^{1/4}+1|_1^{16} \\ &= 4 \left[\frac{(16^{1/2}-1^{1/2})}{2} - (16^{1/4}-1^{1/4}) \right] + 4 \ln|(16^{1/4}-1^{1/4})+1| \\ &= 4 \left[\frac{(4-1)}{2} - (2-1) \right] + 4 \ln|(2-1)+1| = 2 + 4 \ln(2)\end{aligned}$$

5.5.2 การประยุกต์ใช้อินทิเกรตจำกัดเขต

การประยุกต์ใช้อินทิเกรตจำกัดเขตโดยส่วนมากใช้กับ การหาพื้นที่ การหาปริมาตร ความยาวเส้นโค้ง จุลรวมมวล โมเมนต์ และความเคี้ยว

1. การหาพื้นที่บนระนาบ

การหาพื้นที่บนระนาบด้วยวิธีการอินทิเกรตแบบจำกัดเขตนี้ แบ่งลักษณะการหาพื้นที่บนระนาบออกเป็น 2 แบบดังนี้

1.1 การหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งและแกน คือพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน x หรือแกน y ในที่นี้จะหาพื้นที่ในระนาบของแกน x และแกน y เท่านั้น โดยกำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ใด ๆ และให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

Implicit Integration Improper Integration

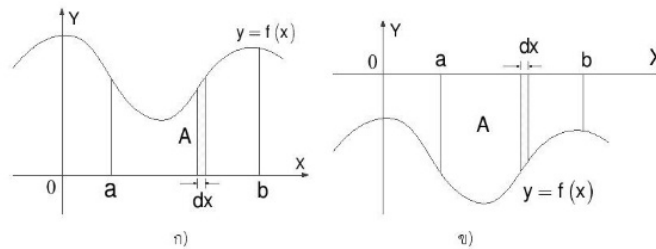
Numerical Integration and Application



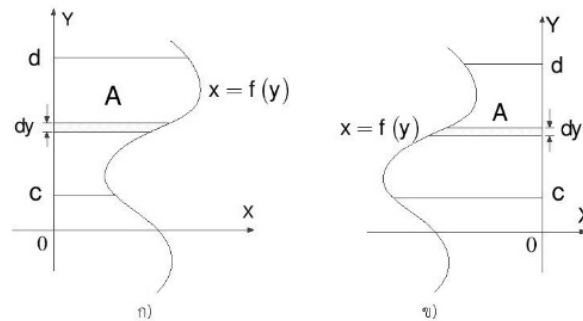
$y = f(x)$ และแกน x ดังภาพที่ 5.1 ลักษณะพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x มีพื้นที่ที่อยู่เหนือแกน x และพื้นที่ที่อยู่ใต้แกน x สามารถหาพื้นที่ด้วยการอินทิเกรตจำกัดเขตตามสมการที่ (5.3) และสมการที่ (5.4) ตามลำดับ

$$A = \int_a^b y dx \quad (5.3)$$

$$A = - \int_a^b y dx \quad (5.4)$$



ภาพที่ 5.1 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x



ภาพที่ 5.2 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ในทำนองเดียวกันนี้ถ้ากำหนดให้ $x = f(y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ ใด ๆ และให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ และแกน y ดังภาพที่ 5.2 ลักษณะพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y มีพื้นที่ที่อยู่ด้านซ้ายของแกน y และพื้นที่ที่อยู่ด้านขวาของแกน y สามารถหาพื้นที่ด้วยการอินทิเกรตจำกัดเขตตามสมการที่ (5.5) และสมการที่ (5.6) ตามลำดับ

$$A = -\int_c^d x dy \quad (5.5)$$

$$A = \int_c^d x dy \quad (5.6)$$

ตัวอย่างที่ 5.71 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4$ กับแนวแกน y และ แกน x ดังภาพที่แสดง

วิธีทำ

พิจารณาได้ 2 กรณีคือบริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y และ บริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x

กรณีที่ 1 บริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y

หาพื้นที่ได้จากสูตร $A = \int_c^d x dy$ พื้นที่อยู่ด้านขวาของแกน y

จาก $y = x^2 - 4$ จะได้

$$x = \sqrt{y+4} \text{ ซึ่งตลอดช่วงปิด } y \in [-4, 0]$$

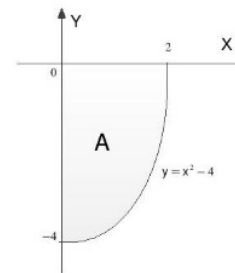
$$\therefore A = \int_{-4}^0 \sqrt{y+4} dy$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^0 (y+4)^{1/2} dy = \frac{(y+4)^{3/2}}{3/2} \Big|_{-4}^0 = \frac{(0+4)^{3/2}}{3/2} - \frac{(-4+4)^{3/2}}{3/2} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) 4^{3/2} = \frac{16}{3} \text{ ตร.หน่วย} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 บริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x

หาพื้นที่ได้จากสูตร $A = -\int_a^b y dx$ พื้นที่อยู่ด้านขวาของแกน x

จาก $y = x^2 - 4$ จะได้ ซึ่งตลอดช่วงปิด $x \in [0, 2]$



Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application

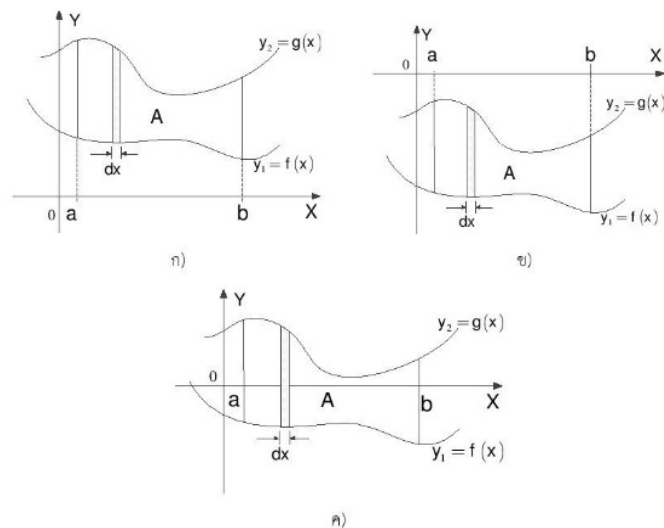


$$\begin{aligned} \therefore A &= -\int_0^2 (x^2 - 4) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\bigg|_0^2 = -\left(\frac{2^3}{3} - 4(2)\right) + \left(\frac{0^3}{3} - 4(0)\right) \\ &= -\left(-\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{16}{3} \text{ ตร.หน่วย} \end{aligned}$$

1.2 การหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งสองเส้น คือกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ ทุกค่าของ $x \in [a, b]$ ในช่วงปิดนั้น และ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น $y_1 = f(x)$ และ $y_2 = g(x)$ มีเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ตัดผ่านทำให้เกิดเป็นพื้นที่ A สามารถแบ่งเป็นสามกรณีดังภาพที่ 5.3 ลักษณะของพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น และขอบเขตช่วงปิดใด ๆ สามารถหาพื้นที่ A ได้ตามสมการที่ (5.7)

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx \quad (5.7)$$

เมื่อ $y_2 \geq y_1$ และ $b > a$



ภาพที่ 5.3 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้นมีสตรียขนานแกน y

Implicit Integration Improper Integration

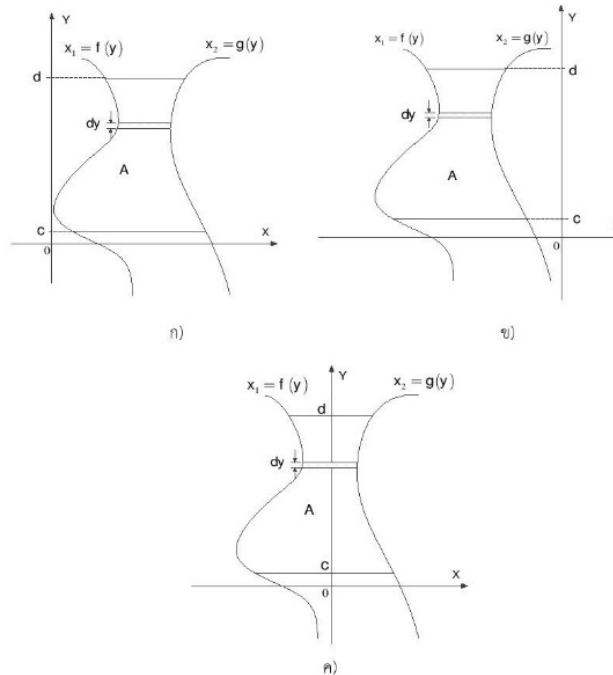
Numerical Integration and Application



ในทำนองเดียวกันกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(y)$ และ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ ใด ๆ โดยที่ $f(y) \leq g(y)$ ทุกค่าของ $y \in [c,d]$ ในช่วงปิดนั้น และ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น $x_1 = f(y)$ และ $x_2 = g(y)$ มีเส้นตรง $y=c$ และ $y=d$ ตัดผ่านทำให้เกิดเป็นพื้นที่ A สามารถแบ่งเป็นสามกรณีดังภาพที่ 5.4 ลักษณะของพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น และขอบเขตช่วงปิดใด ๆ สามารถหาพื้นที่ A ได้ตามสมการที่ (5.8)

$$A = \int_c^d (x_2 - x_1) dy \quad (5.8)$$

เมื่อ $x_2 \geq x_1$ และ $d > c$



ภาพที่ 5.4 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้นมีสตริบขนานแกน x

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ตัวอย่างที่ 5.72 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2 + 8$, และเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x$ ดังภาพด้านล่างนี้

วิธีทำ

กำหนดให้ $y_1 = f(x)$ เป็น $y = x^2 - 2x$

และ $y_2 = f(x)$ เป็น $y = 4x - x^2 + 8$

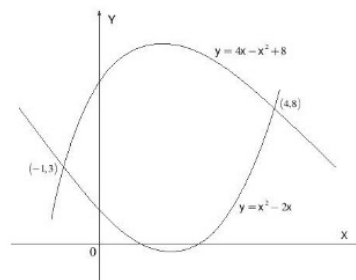
$$\text{จาก } A = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$$

$$= \int_{-1}^4 [(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)] dx$$

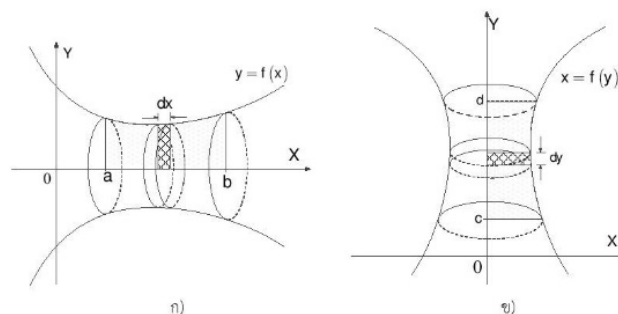
$$= \int_{-1}^4 (6x - 2x^2 + 8) dx$$

$$= \left[\frac{6x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + 8x \right]_{-1}^4 = \left(3(4)^2 - \frac{2(4)^3}{3} + 8(4) \right) - \left(3(-1)^2 - \frac{2(-1)^3}{3} + 8(-1) \right)$$

$$= \left(48 - \frac{128}{3} + 32 \right) - \left(3 + \frac{2}{3} - 8 \right) = 85 - \frac{130}{3} = \frac{125}{3}$$



2. การหาปริมาตรด้วยวิธีการอินทิเกรต ในที่นี้ได้อธิบายวิธีการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนด้วยวิธีการอินทิเกรตเป็นสองแบบคือ การหาปริมาตรด้วยวิธีจาน (disk) และการหาปริมาตรด้วยวิธีเปลือกทรงกระบอก



ภาพที่ 5.5 แสดงการหาปริมาตรเมื่อหมุนพื้นที่รอบแกน x และแกน y

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



กรณีที่ 1 วิธีหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกนด้วยวิธีจาน พิจารณาจาก ปริมาตรของรูปทรงกระบอก เท่ากับ $\pi r^2 h$ เมื่อ r คือรัศมี และ h คือความสูง ถ้าทำการเปรียบเทียบ ตามภาพที่ 5.5 จะได้ว่ารัศมีของจานคือค่า $y = f(x)$ เป็นค่า y ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และความ สูงเท่ากับความหนาของจานก็คือ dx การเปลี่ยนแปลงของ x เมื่อพิจารณาแกนหมุนคือแกน x ตาม ภาพที่ 5.5 ก) ก็เช่นเดียวกันถ้าแกนหมุนเป็นแกน y ตามภาพที่ 5.5 ข) ค่ารัศมีคือค่า $x = f(y)$ เป็นค่า x ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y และความสูงเท่ากับความหนาของจานคือ dy การเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อพิจารณาแกนหมุนคือแกน y สามารถหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x และ แกน y ได้ตามสมการที่ (5.9) และ (5.10) ตามลำดับ

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (5.9)$$

สมการที่ (5.9) เมื่อแกนหมุนเป็นแกน x และ

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy \quad (5.10)$$

สมการที่ (5.10) เมื่อแกนหมุนเป็นแกน y

ตัวอย่างที่ 5.73 หหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \quad \text{ก) รอบแกน } x \quad \text{ข) รอบแกน } y$$

วิธีทำ

จากโจทย์ $9x^2 + 4y^2 = 36$ เป็นสมการวงรี สามารถเขียนอยู่ในรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

จะได้ $a=3$ และ $b=2$ ซึ่งมีแกนยาวทับแกน y มีจุดศูนย์กลางที่กำเนิด $(0,0)$

ก) หาปริมาตรหมุนรอบแกน y

โดยรัศมีเท่ากับ x ความหนาเท่ากับ dy ขอบเขตของการอินทิเกรตจาก $y=0$ ถึง $y=3$

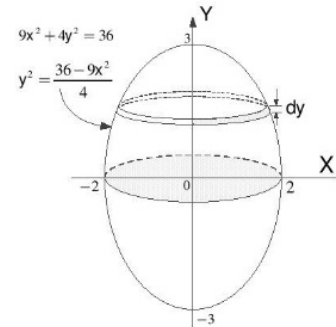
$$\text{จากสูตร } V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy \text{ จะได้}$$

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dy$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^3 \left(\frac{36-4y^2}{9} \right) dy \\
 &= \frac{\pi}{9} \int_0^3 (36-4y^2) dy \\
 &= \frac{\pi}{9} \left[36x - \frac{4y^3}{3} \right]_0^3 \\
 &= \frac{\pi}{9} \left[36(3-0) - \frac{4(3-0)^3}{3} \right] \\
 &= \frac{\pi}{9} (108-36) = 8\pi \text{ ลบ.หน่วย}
 \end{aligned}$$

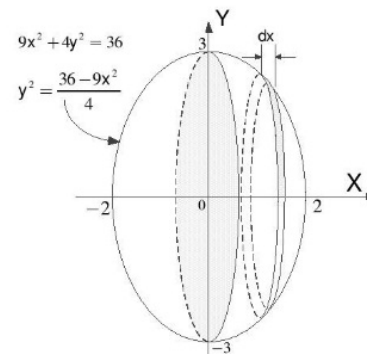


ข) หาปริมาตรหมุนรอบแกน x

โดยวิธีห้เท่ากับ y ความหนาเท่ากับ dx ขอบเขตของการอินทิเกรตจาก x=0 ถึง y=2

$$\text{จากสูตร } V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 y^2 dx \\
 &= \pi \int_0^2 \left(\frac{36-9x^2}{4} \right) dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^2 (36-9x^2) dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[36x - \frac{9x^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[36(2-0) - 3(2-0)^3 \right] \\
 &= \frac{\pi}{4} (72-24) = 12\pi \text{ ลบ.หน่วย}
 \end{aligned}$$



กรณีที่ 2 วิธีหาปริมาตรของรูปทรงตันด้วยวิธีเปลือกทรงกระบอก

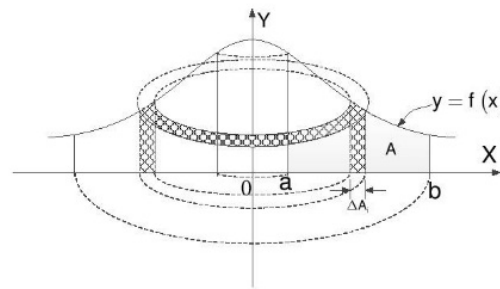
ในการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนนี้ บางครั้งใช้วิธีเปลือกทรงกระบอก สะดวกกว่าการใช้วิธีจานในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีนี้ที่ทรงตันมีความกลวงเมื่อหมุนรอบแกนใด ๆ ดังภาพที่ 5.6 กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วย

Implicit Integration Improper Integration

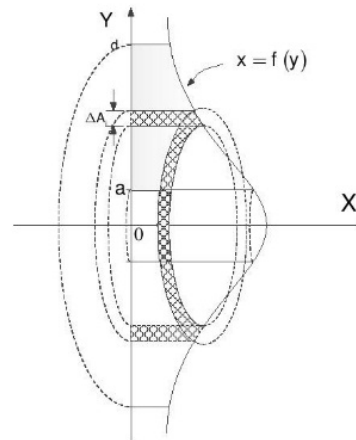
Numerical Integration and Application

เส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x เส้นตรง $x=a$ และเส้นตรง $x=b$ ดังแสดงในภาพที่ 5.6 สามารถหาปริมาตรของทรงตัน V ที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ A รอบแกน y ด้วยสมการที่ (5.11)

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad (5.11)$$



ภาพที่ 5.6 ลักษณะการหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y



ภาพที่ 5.7 ลักษณะการหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน x

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



ในทำนองเดียวกัน ดังภาพที่ 5.7 สามารถหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน x โดยกำหนด $x = f(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ กับแกน y เส้นตรง $y=c$ และเส้นตรง $y=d$ สามารถหาปริมาตรจากสมการที่ (5.12) เมื่อ แกนหมุนเป็นแกน x

$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot f(y) dy \quad (5.12)$$

ตัวอย่างที่ 5.74 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = x^{2/3}$ ดังภาพด้านล่าง โดยใช้วิธีเปลือกทรงกระบอก ก. หมุนรอบแกน x ข. หมุนรอบเส้นตรง $x = 1$

วิธีทำ

ก. หมุนรอบแกน x

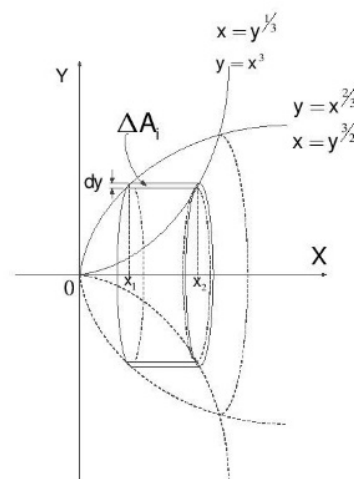
ในบริเวณพื้นที่ที่ปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = x^{2/3}$

ให้ตัดเป็นพื้นที่ A_i ที่ขนานกับแกน x ที่มีรัศมีเท่ากับ y

ความสูงมีค่าเท่ากับ $x_2 - x_1$ ลิ้มิตจาก $y = 0$ และ $y = 1$

แทนค่าตามสูตร $V = 2\pi \int_c^d y \cdot f(y) dy$ จะได้

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 y (y^{2/3} - y^{1/3}) dy \\ &= 2\pi \int_0^1 (y^{5/3} - y^{2/3}) dy \\ &= 2\pi \left[\int_0^1 y^{5/3} dy - \int_0^1 y^{2/3} dy \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{y^{8/3}}{8/3} - \frac{y^{5/3}}{5/3} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{8}(1-0)^{8/3} - \frac{3}{5}(1-0)^{5/3} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{8} - \frac{3}{5} \right] \\ &= \frac{2\pi}{7} \text{ ลบ. หน่วย} \end{aligned}$$



Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ข. หมุนรอบเส้นตรง $x=1$

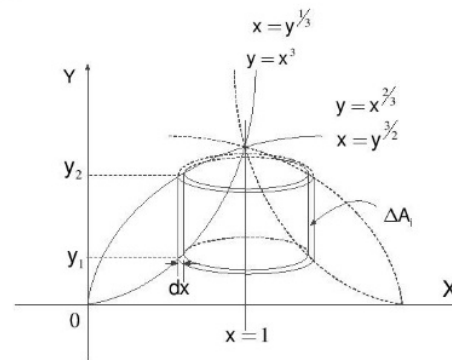
ในบริเวณพื้นที่ปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=x^3$ และ $y=x^{2/3}$

ให้ตัดเป็นพื้นที่ A ที่ขนานกับแกนหมุน $x=1$ ที่มีรัศมีเท่ากับ $x-1$

ความสูงมีค่าเท่ากับ $y_2 - y_1$ ลิ้มิตจาก $x=0$ และ $x=1$

แทนค่าตามสูตร $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$ จะได้

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x (x^{2/3} - x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 (x^{5/3} - x^4) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^{8/3}}{8/3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{8}(1-0)^{8/3} - \frac{1}{5}(1-0)^5 \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{12-5}{40} \right] \\ &= \frac{7\pi}{10} \text{ ลบ. หน่วย} \end{aligned}$$



5.6 การอินทิเกรตรูปแบบยังไม่กำหนด การอินทิเกรตไม่ตรงแบบ การอินทิเกรตเชิงตัวเลข

5.6.1 การอินทิเกรตรูปแบบยังไม่กำหนด

ทั้งที่อันดับของอินทิเกรตมีลักษณะสมการคณิตศาสตร์ไม่ได้มีรูปแบบการเขียนที่ตายตัวทั้งหมด และมักจะมีการเขียนสมการที่มีอนุพันธ์ประกอบอยู่ในสมการด้วย เช่น $\frac{dy}{dx} = (2x^3 - 4x^2 + 2x)$ ดังนั้นหากจะหาค่าของสมการนี้ต้องใช้อินทิเกรตไม่ตรงแบบ (indefinite integral) เข้าช่วย จะได้ สมการแบบนี้จะเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด หรือเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ จาก $\frac{dy}{dx} = (2x^3 - 4x^2 + 2x)$ หาค่า y ได้ดังนี้

$$dy = (2x^3 - 4x^2 + 2x) dx$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



$$\begin{aligned}\int dy &= \int (2x^3 - 4x^2 + 2x) dx \\ \text{ดังนั้น} \quad y &= \int (2x^3 - 4x^2 + 2x) dx \\ y &= \int 2x^3 dx - \int 4x^2 dx + \int 2x dx \\ y &= \frac{2x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c \\ y &= \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + x^2 + c\end{aligned}$$

ซึ่งจะสามารถหาค่า c ได้จากการกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปร x และ y อาทิเช่น สมมติให้ $x=1$ และ $y=2$ สามารถหาค่า c ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}2 &= \frac{1^4}{2} - \frac{4(1)^3}{3} + 1^2 + c \\ c &= 2 - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1 \\ c &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} \\ \text{จะได้} \quad y &= \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + x^2 + \frac{11}{6}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.74 จงหาสมการเส้นโค้ง เมื่อกำหนดให้ $dy = 4(x-7)^3 dx$ และ $y=10$ เมื่อ $x=8$

วิธีทำ จาก $dy = 4(x-7)^3 dx$

หาค่า y โดยอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned}\int dy &= \int 4(x-7)^3 dx \\ y &= 4 \int (x-7)^3 dx \\ y &= 4 \frac{(x-7)^4}{4} + c = (x-7)^4 + c\end{aligned}$$

แทนค่า $y=10$ เมื่อ $x=8$ จะได้

$$10 = (8-7)^4 + c$$

$$c = 10 - 1 = 9$$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง เท่ากับ $y = (x-7)^4 + 9$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ตัวอย่างที่ 5.75 จงหาสมการเส้นโค้ง เมื่อกำหนดให้ $y'' = (6x-8)$ และผ่านจุด $(1,0)$ และมีความชัน ณ จุดนั้นเท่ากับ $m = 4$

วิธีทำ

จากโจทย์ $y'' = (6x-8)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่สองหา y' ได้ด้วยการอินทิเกรตหนึ่งครั้ง จะได้

$$\frac{d}{dx}(y') = (6x-8)$$

$$d(y') = (6x-8)dx$$

$$\int d(y') = \int (6x-8)dx$$

$$y' = 3x^2 - 8x + c_1$$

สมการเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(1,0)$ และมีความชัน $m = 4$ ดังนั้น จะได้

$$4 = 3(1)^2 - 8(1) + c_1$$

$$c_1 = 9$$

แทนค่า $c_1 = 9$ จะได้ $y' = 3x^2 - 8x + 9$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง จะได้

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 9$$

$$dy = (3x^2 - 8x + 9)dx$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\int dy = \int (3x^2 - 8x + 9)dx$$

$$y = x^3 - 4x^2 + 9x + c_2$$

สมการเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(1,0)$ แทนค่า $x=1$ และ $y=0$ จะได้

$$0 = (1)^3 - 4(1)^2 + 9(1) + c_2$$

$$c_2 = -1 + 4 - 9$$

$$c_2 = -6$$

จะได้สมการเส้นโค้งเป็น $y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



5.6.2 การอินทิเกรตไม่ตรงแบบ

โดยทั่วไปที่เราได้ศึกษามาในเรื่องการหาค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขตที่ผ่านมาเป็นการหาค่าอินทิกรัลที่ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีขอบเขตที่แน่นอน ซึ่งการอินทิเกรตไม่ตรงแบบมีฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตที่แน่นอน ช่วงของการอินทิเกรตมีขอบเขตเป็นอนันต์ หรือฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง ณ จุดใดจุดหนึ่ง สามารถแบ่งออกได้ดังนี้

แบบที่ 1 การอินทิเกรตไม่ตรงแบบฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีขอบเขตเป็นค่าอนันต์

กรณีที่ 1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมบนช่วง $[a, +\infty)$ และถ้าฟังก์ชัน f สามารถหาค่าอินทิเกรตได้บนทุก ๆ ช่วง $[a, b]$ โดย $b > a$ ดังนั้นกล่าวได้ว่า การหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, +\infty)$ จะได้ดังสมการที่ (5.13)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (5.13)$$

จากสมการที่ (5.13) หาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วหาลำลิมิต $\lim_{b \rightarrow +\infty}$ ถ้าหากผลลัพธ์ที่ได้เป็นลิมิตหาค่าได้ แสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ อยู่เข้าค่าลิมิตนั้น และถ้าหาผลลัพธ์เป็นลิมิตไม่ได้แสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ลู่ออก

กรณีที่ 2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมบนช่วง $[-\infty, b]$ และถ้าฟังก์ชัน f สามารถหาค่าอินทิเกรตได้บนทุก ๆ ช่วง $[a, b]$ โดย $a < b$ ดังนั้นกล่าวได้ว่า การหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[-\infty, b]$ จะได้ดังสมการที่ (5.14)

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (5.14)$$

จากสมการที่ (5.14) หาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วหาลำลิมิต $\lim_{a \rightarrow -\infty}$ ถ้าหากผลลัพธ์ที่ได้เป็นลิมิตหาค่าได้ แสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ อยู่เข้าค่าลิมิตนั้น และถ้าหาผลลัพธ์เป็นลิมิตหาค่าไม่ได้แสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ลู่ออก

กรณีที่ 3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมบนช่วง $[-\infty, \infty)$ และถ้าฟังก์ชัน f สามารถหาค่าอินทิเกรตได้บนทุก ๆ ช่วง $[-\infty, c]$ โดย $-\infty < c < \infty$ ดังนั้นกล่าวได้ว่า การหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[-\infty, \infty)$ จะได้ดังสมการที่ (5.15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (5.15)$$

จากสมการที่ (5.15) หาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าอยู่เข้า ก็ต่อเมื่อผลบวกของอินทิเกรตทั้งสองทางขวามือมีค่าอยู่เข้า มีฉะนั้นแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ลู่ออก

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ตัวอย่างที่ 5.76 จงหาค่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{2}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^0 \frac{2}{1+x^2} dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b \frac{2}{1+x^2} dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(2 \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(2 \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\tan^{-1}(x) \right)_a^0 + 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1}(x) \right)_0^b \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \tan^{-1}(a)) + 2 \lim_{b \rightarrow \infty} (\tan^{-1}(b) - 0) \\ &= 2(-\tan^{-1}(-\infty)) + 2(\tan^{-1}(\infty)) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

แบบที่ 2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีความไม่ต่อเนื่อง

กรณีที่ 1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีขอบเขตบนช่วง (a,b) ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีความไม่ต่อเนื่องที่จุด a โดย $a < x \leq b$ สามารถหาค่าอินทิเกรตได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) dx \quad (5.16)$$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีขอบเขตบนช่วง (a,b) ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีความไม่ต่อเนื่องที่จุด b โดย $a \leq x < b$ สามารถหาค่าอินทิเกรตได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f(x) dx \quad (5.17)$$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีขอบเขตบนช่วง (a,b) ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีความไม่ต่อเนื่องที่จุด c โดย $a < c < b$ สามารถหาค่าอินทิเกรตได้ดังนี้

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5.18)$$

จะได้

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow c^-} \int_a^B f(x) dx + \lim_{A \rightarrow c^+} \int_A^b f(x) dx$$

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



ตัวอย่างที่ 5.77 จงหา $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_a^1 x^{-1/2} dx \right) \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{x^{1/2}}{1/2} \right) \Big|_a^1 \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(2x^{1/2} \right) \Big|_a^1 \\ &= 4 \lim_{a \rightarrow 0} (1 - a^{1/2}) \\ &= 4(1 - (0)^{1/2}) = 4 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.78 จงหา $\int_0^2 \left(\frac{1}{2-x} \right) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{2-x} dx &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2-x} \right) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 2} \left(\int_0^b \frac{1}{2-x} dx \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow 2} (-\ln(2-x)) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 2} (-\ln(2-b) + \ln(2-0)) \\ &= -\ln(2-2) + \ln(2-0) \\ &= -\infty + \ln(2) = -\infty \end{aligned}$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



ตัวอย่างที่ 5.79 จงหา $\int_0^2 \left(\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \right) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \right) dx &= \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{3/2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{(1-x)^{3/2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{(1-x)^{3/2}} dx + \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{1}{(1-x)^{3/2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[-\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2} \right]_0^b + \lim_{a \rightarrow 1^+} \left[-\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2} \right]_a^2 \\ &= 3 \lim_{b \rightarrow 1^-} \left((1-b)^{1/2} + (1-0)^{1/2} \right) + 3 \lim_{a \rightarrow 1^+} \left((1-2)^{1/2} + (1-a)^{1/2} \right) \\ &= 3 \lim_{b \rightarrow 1^-} \left((1-b)^{1/2} + 1 \right) + 3 \lim_{a \rightarrow 1^+} \left((-1) + (1-a)^{1/2} \right) \\ &= 3(0+1) + 3((-1)+0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แบบที่ 3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตมีความไม่ต่อเนื่องและมีขอบเขตช่วงของการอินทิเกรตเป็นอนันต์

กำหนดให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรต มีช่วงขอบเขตของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ และฟังก์ชัน f พิจารณาแล้วมีความไม่ต่อเนื่องในช่วงนี้ เรือรูปแบบนี้ว่าเป็นการหาค่าอินทิเกรตไม่ตรงแบบ ผสมระหว่างความไม่ต่อเนื่องและมีช่วงของการอินทิเกรตเป็นอนันต์ สามารถหาค่าอินทิเกรตโดยการแยกทำการอินทิเกรต เช่น ฟังก์ชัน $\int_{-\infty}^2 \left(\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \right) dx$ $\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+x)} \right) dx$ หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(x^2+x)} \right) dx$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 5.80 จงหา $\int_{-3}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+3)} \right) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+3)} \right) dx &= \int_{-3}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+3)} \right) dx \\ &= \int_{-3}^3 \left(\frac{1}{(x+3)} \right) dx + \int_3^{\infty} \left(\frac{1}{(x+3)} \right) dx \end{aligned}$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{a \rightarrow 3^+} \int_a^3 \left(\frac{1}{x+3} \right) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \left(\frac{1}{x+3} \right) dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 3^+} \ln(x+3) \Big|_a^3 + \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x+3) \Big|_3^b \\
 &= \lim_{a \rightarrow 3^+} [\ln(3+3) - \ln(a+3)] + \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(b+3) - \ln(3+3)] \\
 &= [\ln(9) - \ln(0)] + [\ln(\infty) - \ln(9)] \\
 &= -(-\infty) + (\infty) = \infty
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.81 จงหา $\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx + \int_1^{\infty} \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{-x^{-1/2}}{2} \right) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{-x^{-1/2}}{2} \right) dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 (e^{-\sqrt{x}}) \left(\frac{-2}{2\sqrt{x}} \right) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (e^{-\sqrt{x}}) \left(\frac{-2}{2\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (-2) \int_a^1 (e^{-\sqrt{x}}) \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} (-2) \int_1^b (e^{-\sqrt{x}}) \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (-2) \int_a^1 (e^{-\sqrt{x}}) d(e^{-\sqrt{x}}) + \lim_{b \rightarrow \infty} (-2) \int_1^b (e^{-\sqrt{x}}) d(e^{-\sqrt{x}}) \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (-2) (e^{-\sqrt{x}}) \Big|_a^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} (-2) (e^{-\sqrt{x}}) \Big|_1^b \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (-2e^{-\sqrt{1}} + 2e^{-\sqrt{a}}) + \lim_{b \rightarrow \infty} (-2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-\sqrt{1}}) \\
 &= (-2e^{-\sqrt{1}} + 2e^{-\sqrt{0}}) + (-2e^{-\sqrt{\infty}} + 2e^{-\sqrt{1}}) \\
 &= \left(\frac{-2}{e} + 2 + \frac{2}{e} \right) = 2
 \end{aligned}$$

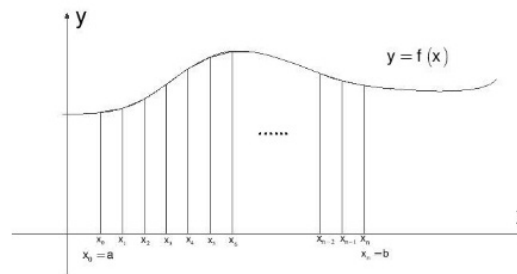
Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



5.6.3 การอินทิเกรตเชิงตัวเลข

การอินทิกรัลแบบจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ ในกรณีที่ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่สามารถหาค่าอินทิเกรตที่เคอร์เรียนมาได้ ซึ่งในการหาค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขตนี้จะต้องสามารถหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ก่อนจึงจะสามารถหาแทนค่าลิมิตขอบเขตบนและล่างได้ หากไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ก็จะมีค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขตที่ถูกต้องได้ ในการหาค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขตที่มีฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตที่ยากซับซ้อน ดังเช่นฟังก์ชันต่อไปนี้ $\int_{-\pi}^{\pi/2} (\sqrt{1+\sin^2 x}) dx$, $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{x^2} dx$, $\int_{-2}^4 (\sqrt{1-2x^3}) dx$ เป็นต้น ฟังก์ชันเหล่านี้ไม่มีสูตรพื้นฐานในการหาค่า ในกรณีนี้จะใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขมีวิธีการหาที่แม่นยำโดยแบ่งออกเป็น วิธีการสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีการของซิมป์สัน ดังนี้

วิธีการสี่เหลี่ยมคางหมูมีลักษณะคล้ายกับการหาพื้นที่ใต้กราฟแบบผลรวมรีมันน์ พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องตลอดช่วงปิด $[a,b]$ แล้วสามารถหาค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขตโดยแบ่งพื้นที่เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูย่อยแล้วนำพื้นที่ทั้งหมดมารวมกัน จากสูตรการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู ความสูงคูณผลบวกความยาวของด้านคู่ขนานแล้วหารด้วยสอง ด้วยวิธีการผลรวมของรีมันน์ตามสมการที่ (5.19)



ภาพที่ 5.8 ลักษณะการหาพื้นที่ใต้กราฟแบบผลรวมรีมันน์

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (5.19)$$

โดย $f(x_i^*)$ เป็นการหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ณ ตำแหน่ง x_i^* ค่า n คือจำนวนช่วงย่อยที่ถูกแบ่งออกในตลอดช่วงใหญ่ $[a,b]$ ส่วน Δx คือผลต่างของแต่ละช่วงย่อย หาได้จาก $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ จากสมการผลรวมของรีมันน์ใช้หาค่าประมาณของสี่เหลี่ยมคางหมูได้ดังสมการที่ (5.20)

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (5.20)$$

ซึ่ง $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ และ $x_i = a + i\Delta x$ และ $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

ตัวอย่างที่ 5.82 จงหา $\int_1^2 \left(\frac{1}{(1+x)} \right) dx$ ให้ $n=10$

วิธีทำ

$$\text{ให้ } n=10 \text{ และ } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ ดังนั้น } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x_i)$	0.5	0.476	0.454	0.434	0.416	0.400	0.384	0.370	0.357	0.344	0.333

จากสูตร $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{(1+x)} \right) dx &\approx \frac{0.1}{2} [0.5 + 2(0.476) + 2(0.454) + 2(0.434) + 2(0.416) + 2(0.400) \\ &\quad + 2(0.384) + 2(0.370) + 2(0.357) + 2(0.344) + (0.333)] \\ &\approx \frac{0.1}{2} (8.103) \\ &\approx \frac{0.8103}{2} \approx 0.405 \end{aligned}$$

เนื่องจากฟังก์ชันที่โจทย์ให้อินทิเกรตนี้สามารถหาค่าอินทิเกรตด้วยวิธีพื้นฐาน ดังนั้นจะลองหาค่าเพื่อทำการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{(1+x)} \right) dx &= \int_1^2 \frac{1}{(1+x)} dx \\ &= \ln(1+x) \Big|_1^2 \\ &= \ln(1+2) - \ln(1+1) \\ &= \ln(3) - \ln(2) = (1.098) - (0.693) \approx 0.405 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.83 จงหา $\int_0^1 \left(\frac{\cos(x)}{(1+x)} \right) dx$ ให้ $n=10$

วิธีทำ

$$\text{ให้ } n=10 \text{ และ } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ ดังนั้น } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_i)$	1	0.909	0.833	0.769	0.714	0.666	0.624	0.588	0.555	0.526	0.999

จากสูตร $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\cos(x)}{(1+x)} \right) dx &\approx \frac{0.1}{2} [1 + 2(0.909) + 2(0.833) + 2(0.769) + 2(0.714) + 2(0.666) \\ &\quad + 2(0.624) + 2(0.588) + 2(0.555) + 2(0.526) + (0.999)] \\ &\approx \frac{0.1}{2} (14.370) \\ &\approx \frac{1.437}{2} \approx 0.7185 \end{aligned}$$

วิธีซิมป์สันใช้กับการหาค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขตในกรณีฟังก์ชันที่อนุพันธ์ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานได้ วิธีของซิมป์สันจะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกว่าวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู สำหรับผลแบ่งย่อยออกเป็น n ช่วงของพื้นที่ต้องการหาค่าในช่วงปิด $[a,b]$ ใด ๆ เป็นการหาผลรวมของพื้นที่ ๆ ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง พิจารณาเป็นช่วงย่อยที่ได้แบ่งออก สามารถหาได้จากสูตรของซิมป์สันตามสมการที่ (5.21)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (5.21)$$

ซึ่ง $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ และ $x_i = a + i\Delta x$ และ $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

ตัวอย่างที่ 5.84 จงหา $\int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2+x}} \right) dx$ ให้ $n = 6$

วิธีทำ

$$\text{ให้ } n = 6 \text{ และ } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \text{ ดังนั้น } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$$

จากสูตร $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2+x}} \right) dx &\approx \frac{1/3}{3} \left[\frac{1}{\sqrt{2+0}} + \frac{4}{\sqrt{2+1/3}} + \frac{2}{\sqrt{2+2/3}} + \frac{4}{\sqrt{2+1}} + \frac{2}{\sqrt{2+4/3}} + \frac{4}{\sqrt{2+5/3}} + \frac{1}{\sqrt{2+2}} \right] \\ &\approx \frac{1}{9} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{7/3}} + \frac{2}{\sqrt{8/3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{10/3}} + \frac{4}{\sqrt{11/3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right] \end{aligned}$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{9} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{7/3}} + \frac{2}{\sqrt{8/3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{10/3}} + \frac{4}{\sqrt{11/3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right] \\ &\approx \frac{1}{9} [0.707 + 2.618 + 1.224 + 2.309 + 1.095 + 2.088 + 0.5] \\ &\approx \frac{1}{9} [10.541] \\ &\approx 1.1712 \end{aligned}$$

เนื่องจากฟังก์ชันที่โจทย์ให้อินทิเกรตนี้สามารถหาค่าอินทิเกรตด้วยวิธีพื้นฐาน ดังนั้นจะลองหาค่าเพื่อทำการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2+x}} \right) dx &= \int_0^2 (2+x)^{-1/2} dx \\ &= \frac{(2+x)^{1/2}}{1/2} \Big|_0^2 \\ &= 2 \left[(2+2)^{1/2} - (2+0)^{1/2} \right] \\ &= 2 \left[4^{1/2} - (2)^{1/2} \right] \approx 1.1715 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.85 จงหา $\int_0^3 \left(\frac{1}{1+x^3} \right) dx$ ให้ $n=6$

วิธีทำ ให้ $n=6$ และ $i=0,1,2,3,\dots,n$ ดังนั้น $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$

จากสูตร $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned} &\int_0^3 \left(\frac{1}{1+x^3} \right) dx \\ &= \frac{1/2}{3} \left[\left(\frac{1}{1+0^3} \right) + \left(\frac{4}{1+(1/2)^3} \right) + \left(\frac{2}{1+(1)^3} \right) + \left(\frac{4}{1+(3/2)^3} \right) + \left(\frac{2}{1+(4/2)^3} \right) + \left(\frac{4}{1+(5/2)^3} \right) + \left(\frac{1}{1+(3)^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[(1) + \left(\frac{4}{1.125} \right) + \left(\frac{2}{2} \right) + \left(\frac{4}{4.375} \right) + \left(\frac{2}{9} \right) + \left(\frac{4}{16.625} \right) + \left(\frac{1}{28} \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} [1 + 3.555 + 1 + 0.914 + 0.222 + 0.240 + 0.035] \\ &= \frac{1}{6} [6.966] = 1.161 \end{aligned}$$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



5.7 บทสรุป

การหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันจากที่ได้ศึกษาในบทนี้ ทำให้ได้ทราบนิยามของคำว่า ปริพันธ์ ที่เป็น ส่วนกลับของอนุพันธ์ สามารถหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันชนิดใด ๆ ได้ อาทิเช่น ฟังก์ชันตรรกยะ ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันแบบไม่จำกัดเขต หาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันแบบจำกัดเขต และนำไปประยุกต์ใช้กับการหาค่าพื้นที่ การหาค่าปริมาตรที่เกิดจากการหมุนรอบแกนได้ สามารถหาค่าอินทิเกรตแบบจำกัดเขต การหาค่าอินทิเกรตรูปแบบไม่กำหนด การหาค่าอินทิเกรตไม่ตรงแบบ การหาค่าอินทิเกรตเชิงตัวเลขฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานได้หรือเป็นการประมาณค่าได้อีกแบบหนึ่งด้วยวิธีการอินทิเกรตนั่นเอง

5.8 คำถามท้ายบท

จงหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\int \left(1 + 2x + 3x^3 - \frac{4x^3}{3} \right) dx$

2. $\int (1 + 2x)(3x^2 - 6) dx$

3. $\int \sqrt{4x} (3x^2 - 6\sqrt{x} + 3x - \sqrt{x}) dx$

4. $\int (1 + 2x)^3 dx$

5. $\int (2x^2 - 1)^8 dx$

6. $\int 3x^3 (x^4 + 1)^7 dx$

7. $\int \sqrt{\tan(3x)} \sec^2(3x) dx$

8. $\int \frac{\arccos(3x)}{(3x)\sqrt{9x^2 - 1}} dx$

9. $\int \left(\frac{2x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x - 1}{x^4 - 2x^3 + 1} \right) dx$

10. $\int \frac{\operatorname{arccosec}(2x)}{x\sqrt{4x^2 - 1}} dx$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



จงหาค่าอินทิเกรตที่จำกัดทั้งข้างล่อการหาค่าต่อไปนี้

1. $\int \frac{1}{(10x-1)} dx$

2. $\int \frac{x}{(2x^2+10)} dx$

3. $\int \frac{dx}{\sec(2x) - \tan(2x)}$

4. $\int \frac{(2x+5)}{(2x^2+10x-3)} dx$

5. $\int \frac{\cos(3x)}{1-\sin(3x)} dx$

6. $\int \frac{e^{3x}+2}{e^{3x}-5} dx$

7. $\int \frac{x \cdot e^{x^3}}{e^{3x}+4} dx$

8. $\int \frac{x^2-6x+9}{2x-6} dx$

9. $\int \frac{\tan(2x)}{\ln(\sin 2x)} dx$

10. $\int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{3x-1} + \frac{4}{2x+5} \right) dx$

จงหาค่าอินทิเกรตที่จำกัดทั้งข้างล่อการหาค่าต่อไปนี้

1. $\int x^2 e^{2x^3+2} dx$

2. $\int \frac{3}{2e^{2x}} dx$

3. $\int x^2 4^{x^3} dx$

4. $\int e^{(\cos 2x)} \sin(2x) dx$

5. $\int \frac{x^3}{e^{x^4}+4} dx$

6. $\int (3x^2+2) e^{2x^3+4x+4} dx$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{e^{2x^4}-x^4}} dx$

Implicit Integration Improper Integration Numerical Integration and Application



8. $\int \frac{e^{\sqrt{3x+4}}}{\sqrt{3x+4}} dx$
9. $\int \sin(2x)e^{1-24x^2} dx$
10. $\int \cos \cot^2(x) \cot(x) e^{\cot^2(x)} dx$

จงหาค่าอินทิกรัลฟังก์ชันแบบตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx$
2. $\int x^3 \cot(x^4 - 1) dx$
3. $\int \frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx$
5. $\int \frac{dx}{1 - \sec(x)}$
6. $\int \frac{\cos \cot^2(\ln x)}{x} dx$
7. $\int \frac{\cot(2x)}{\sin(2x)} dx$
8. $\int \frac{\sec(3x) \sin(3x)}{\cos(3x)} dx$
9. $\int \frac{1 - \sin(3x)}{\tan(3x)} dx$
10. $\int (\cos(x) - \sin(x))^2 dx$

จงหาค่าอินทิกรัลฟังก์ชันที่มีผลเฉลยอยู่ในรูปของตรีโกณมิติผกผันต่อไปนี้

1. $\int \frac{3dx}{\sqrt{2x^2 + 9}}$
2. $\int \frac{dy}{\sqrt{4 - 16y^2}}$
3. $\int \sqrt{5 + 9x^2} dx$
4. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 9)}$

Implicit Integration Improper Integration

Numerical Integration and Application



$$5. \int \frac{\cos \theta d\theta}{16 - \sin^2 \theta}$$

$$6. \int \frac{8dx}{x(\sqrt{25x^2 - 1})}$$

$$7. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4 - 2}}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{2x+9}}$$

$$9. \int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 + 1} dx$$

$$10. \int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 6}} dx$$

จงหาค่าอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลังต่อไปนี้

$$1. \int \sin^4(2\theta) d\theta$$

$$2. \int \cos^5(x) dx$$

$$3. \int \sin^7(2x) \cos^5(2x) dx$$

$$4. \int \sin^4(2x) \cos^6(2x) dx$$

$$5. \int \sin(5x) \cos(2x) dx$$

$$6. \int e^x \cos(5e^x) \cos(3e^x) dx$$

$$7. \int \sin(5x) \cos(7x) dx$$

$$8. \int \tan^4(5x) dx$$

$$9. \int \cot^6(3x) dx$$

$$10. \int \operatorname{cosec}^6\left(\frac{3x}{2}\right) dx$$

$$11. \int \sec^5(3x) dx$$

$$12. \int \tan^4(3x) \sec^5(3x) dx$$

$$13. \int \cot^6(3x) \operatorname{cosec}^5(3x) dx$$