Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Telecommunications Engineering

Faculty of Science and Technology

Electrical Engineering

NPRU

5.4 เทคนิคการอินทิเกรต

ในหัวข้อก่อนหน้านี้เป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันพื้นฐานทั่วไปที่สามารถใช้สูตรการอินทิเกรตในการหาคำตอบได้ แต่ยังมีฟังก์ชันอีกมากที่มีรูปแบบที่ไม่สามารถใช้สูตรการอินทิเกรตทั่วไปหาค่าได้ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเทคนิคการอินทิเกรตแบบต่าง ๆ ที่ช่วยให้สามารถหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันที่ซับซ้อนอีกมาก ซึ่งประกอบด้วยเทคนิคการอินทิเกรต 4 แบบ ได้แก่ การอินทิเกรตทีละส่วน การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตรีโกณมิติ และการอินทิเกรตโดยแทนค่าตัวแปรใหม่

5.4.1 การอินทิเกรตทีละส่วน

เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by part) คือ เทคนิคที่ใช้ในการหาค่าอินทิกรัลฟังก์ชันที่ยาก ๆ สามารถใช้การอินทิเกรตทีละส่วนหาค่าการอินทิเกรตได้ง่ายขึ้น ซึ่งโดยทั่วไปการอินทิเกรตจะอยู่ในรูปของ $\int f(x)dx$ รูปแบบของฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตที่ยากขึ้น ก็จะอยู่ในรูปของ $\int f(x)g(x)dx$ ยกตัวอย่างเช่น $\int xe^x dx$ พิจารณาเป็นสองฟังก์ชันคูณกันคือ $f(x)=x$ และ $g(x)=e^x$ การอินทิเกรตฟังก์ชันลักษณะนี้จะไม่สามารถใช้สูตรการอินทิเกรตทั่วไปได้

สูตรการอินทิเกรตทีละส่วน โดยการพิจารณาจากการหาอนุพันธ์ของสองฟังก์ชัน คือ u และ v ที่คูณกันอยู่ $d(uv)=udv+vdu$ จะได้

$$udv=d(uv)-vdu$$

แล้วคูณด้วยเครื่องหมายการอินทิเกรต $\int$ ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\int udv = (uv) - \int vdu$$

ลักษณะของตัวถูกอินทิเกรตที่จะใช้การอินทิเกรตทีละส่วน ดังนี้

- ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน เช่น $\int x\cos(x)dx$, $\int x^2\cos(x)dx$, $\int e^{2x}\cos(x)dx$, $\int x^2e^{3x}dx$ และ $\int x^2\sqrt{2+3x}dx$ เป็นต้น

- ตัวถูกอินทิเกรตมีฟังก์ชันลอการิทึมประกอบอยู่ เช่น $\int \ln(x)dx$, $\int x^2\ln(x)dx$ เป็นต้น

- ตัวถูกอินทิเกรตมีฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันประกอบอยู่ เช่น $\int x\,\mathrm{arcos}(x)dx$, $\int x\arctan(x)dx$ เป็นต้น

- ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง เช่น $\int \cos^3(x)dx$, $\int \mathrm{cosec}^4(2x)dx$, $\int \sin^3(4x)dx$ เป็นต้น

- ตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปของ $\int \tan^{m}(x)\sec^{n}(x)dx$ หรือ $\int \cot^{m}(x)\operatorname{cosec}^{n}(x)dx$ เมื่อ m เป็นจำนวนคู่บวก และ n เป็นจำนวนคี่บวก

หลักการแบ่ง u และ dv ดังนี้

- ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันโพลิโนเมียลกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ หรือฟังก์ชันโพลิโนเมียลกับฟังก์ชันชี้กำลัง ให้เลือก u เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล และที่เหลือให้เป็น dv เช่น

$\int x\cos(x)dx$ เลือก $u = x$, $dv = \cos(x)dx$

$\int x^2e^{3x}dx$ เลือก $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$

$\int (x^3+6x-1)\sin(x)dx$ เลือก $u = x^3+6x-1$, $dv = \sin(x)dx$

- ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันชี้กำลังกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ให้เลือก u เป็นฟังก์ชันใดก็ได้ และที่เหลือให้เป็น dv เช่น

$\int e^{3x}\cos(2x)dx$ เลือก $u = e^{3x}$, $dv = \cos(2x)dx$

หรือ $u = \cos(2x)$, $dv = e^{3x}dx$

- ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันโพลิโนเมียลกับฟังก์ชันลอการิทึม หรือเป็นฟังก์ชันลอการิทึมอย่างเดียว ให้เลือก u เป็นฟังก์ชันลอการิทึม และที่เหลือให้เป็น dv เช่น

$\int x^2\ln(x)dx$ เลือก $u = \ln(x)$, $dv = x^2dx$

$\int \ln(x)dx$ เลือก $u = \ln(x)$, $dv = dx$

- ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันประกอบอยู่ กับฟังก์ชันใดๆ ให้เลือก u เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และที่เหลือให้เป็น dv เช่น

$\int x\ \operatorname{arcos}(x)dx$ เลือก $u = \arccos(x)$, $dv = xdx$

$\int x\ \arctan(x)dx$ เลือก $u = \arctan(x)$, $dv = xdx$

$\int \frac{x\ \arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ เลือก $u = \arcsin(2x)$, $dv = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

หลักการหาค่าอินทิเกรต

จากฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตเมื่อแบ่ง u และ dv ได้แล้ว จะต้องหาค่า du โดยการหาอนุพันธ์ค่า u และหาค่า v โดยการอินทิเกรตค่า dv เพิ่มอีกสองค่า เพื่อที่จะนำไปแทนลงในสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน $\int udv = (uv) - \int vdu$ เมื่อแทนค่าลงในสูตรแล้วให้ทำการอินทิเกรต $\int vdu$ ด้านขวาของ

สมการด้วยวิธีการอินทิเกรตที่เคยเรียนมาแล้ว ถ้าต้องใช้เทคนิคการอินทิเกรตอีกครั้งก็ต้องทำต่อจนให้ได้ผลลัพธ์ และถ้าหาค่า $\int vdu$ แล้วมีพจน์ที่อยู่ในรูปของ $\int udv$ ให้ทำการย้ายข้างไปด้านซ้ายของสมการเพื่อรวมพจน์กับ $\int udv$ ที่มีอยู่ทางด้านซ้ายอยู่แล้ว สุดท้ายให้บวกค่าคงที่ c ในบรรทัดสุดท้ายของคำตอบ

ตัวอย่างที่ 5.52 จงหาค่า $\int x^2 \ln(x)dx$

วิธีทำ

จากฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรต กำหนดให้ $u = \ln(x)$ และ $dv = x^2dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังนี้

หา du จาก $u = \ln(x)$ $du = d\ln(x)$ $u = \frac{1}{x}dx$	หา v จาก $dv = x^2dx$ $\int dv = \int x^2dx$ $v = \frac{x^3}{3}$

จากสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน $\int udv = (uv) - \int vdu$ แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln(x)dx &= \ln(x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} \\ &= \ln(x)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx \\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.53 จงหาค่า $\int \frac{x\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

วิธีทำ

จากฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรต กำหนดให้ $u = \arcsin(2x)$ และ $dv = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังนี้

หา du จาก $u = \arcsin(2x)$ จะได้ $du = d[\arcsin(2x)]$ $du = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$	หา v จาก $dv = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ จะได้ $\int dv = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ $v = -\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}$

จากสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน $\int udv = (uv) - \int vdu$ แทนค่า จะได้

$$\int x\arcsin(2x)dx = \arcsin(2x)\left(-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}\right)-\int\left(-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin(2x)\left(\sqrt{1-4x^2}\right)+\int\left(\frac{1}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin(2x)\left(\sqrt{1-4x^2}\right)+\frac{x}{2}+c$$

ตัวอย่างที่ 5.54 จงหาค่า $\int e^{3x}\cos(2x)dx$

วิธีทำ

จากฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรต กำหนดให้ $u=\cos(2x)$ และ $dv=e^{3x}dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังนี้

หา du จาก $u=\cos(2x)$ จะได้	หา v จาก $dv=e^{3x}dx$ จะได้
$du = d\cos(2x)$	$\int dv = \int e^{3x}dx$
$du = -2\sin(2x)dx$	$v=\frac{e^{3x}}{3}$

จากสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน $\int udv=(uv)-\int vdu$ แทนค่า จะได้

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \cos(2x)\frac{e^{3x}}{3}-\int\left(-\frac{e^{3x}}{3}2\sin(2x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin(2x)dx$$

ใช้เทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

โดยกำหนดให้ $u=\sin(2x)$ และ $dv=e^{3x}dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังนี้

หา du จาก $u=\cos(2x)$ จะได้	หา v จาก $dv=e^{3x}dx$ จะได้
$du = d\sin(2x)$	$\int dv = \int e^{3x}dx$
$du = 2\cos(2x)dx$	$v=\frac{e^{3x}}{3}$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{3}\left[\sin(2x)\frac{e^{3x}}{3}-\int\frac{e^{3x}}{3}2\cos(2x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x)-\frac{4}{9}\int e^{3x}\cos(2x)dx$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx+\frac{4}{9}\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x)$$

NPRU

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x)$$

$$\frac{13}{9}\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x)$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \left(\frac{9}{13}\right)\frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x)+\left(\frac{9}{13}\right)\frac{2}{9}e^{3x}\sin(2x)+c$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{3}{13}e^{3x}\cos(2x)+\frac{2}{13}e^{3x}\sin(2x)+c$$

วิธีลัดการอินทิเกรตทีละส่วน

นอกจากนี้ยังสามารถใช้วิธีลัดในการหาค่าด้วยเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วนได้ แต่จะไม่สามารถหาได้ทุกฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรต จะใช้ได้บางฟังก์ชันเท่านั้น ถ้าไม่สามารถใช้วิธีลัดได้ก็ให้ใช้สูตรเทคนิคการอินทิเกรตปกติ $\int udv = (uv)-\int vdu$ นี้ แต่ถ้าฟังก์ชันที่สามารถใช้วิธีลัดได้ก็จะทำให้ลดขั้นตอนการคำนวณได้มาก โดยแบ่งวิธีลัดออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 คือใช้วิธีลัดแล้วได้คำตอบทันที มีขั้นตอนการหาคำตอบดังนี้

- เลือก u และ dv เหมือนเดิม แล้วใส่ u และ dv ลงในตารางที่ถูกแบ่งออกเป็นสองช่อง คือช่อง D ให้ใส่ u เป็นการหาค่าอนุพันธ์ และช่อง I ให้ใส่ dv เป็นการหาค่าอินทิเกรต
- ช่อง D ให้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นไปเรื่อย ๆ จนมีค่าเป็นศูนย์ และช่อง I ให้ทำการอินทิเกรตฟังก์ชันนั้นไปจนกระทั่งเท่ากับจำนวนครั้งที่หาอนุพันธ์ของช่อง D
- ระหว่างช่อง D และช่อง I ให้คูณทะแยงมุมลงด้านล่าง (เขียนเป็นลูกศรชี้ลง) เริ่มที่ด้านช่อง D ซึ่งในการคูณทะแยงมุมแต่ละครั้งให้ใส่เครื่องหมายบวก (+) และลบ (-) สลับกัน ผลลัพธ์การอินทิเกรตที่ได้คือ ผลรวมของการคูณในแนวทะแยงมุมของแต่ละคู่

ตัวอย่างที่ 5.55 จงหาค่า $\int a^{3x}x^2dx$

วิธีทำ

กำหนดให้ $u = x^2$ และ $dv = a^{3x}dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังตารางผลคุณในแนวทะแยงมุมคือผลลัพธ์การหาค่าอินทิเกรต จะได้

ช่อง D	ช่อง I
x^2	$+$ a^{3x}
$2x$	$\frac{a^{3x}}{3\ln(a)}$
	$-$
2	$\frac{a^{3x}}{9\ln^2(a)}$
	$+$
0	$\frac{a^{3x}}{27\ln^3(a)}$

$$\int a^{3x}x^2dx = x^2\frac{a^{3x}}{3\ln(a)}-2x\frac{a^{3x}}{9\ln^2(a)}+2\frac{a^{3x}}{27\ln^3(a)}+c$$

$$= \frac{a^{3x}}{3\ln(a)}\left[x^2-\frac{2x}{3\ln(a)}+\frac{2}{9\ln^2(a)}\right]+c$$

ตัวอย่างที่ 5.56 จงหาค่า $\int e^{3x}x^3dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u=x^3$ และ $dv=e^{3x}dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังตาราง ใช้วิธีลัด

ช่อง D	ช่อง I
x^3	$+$ e^{3x}
$3x^2$	$-$ $\frac{e^{3x}}{3}$
$6x$	$+$ $\frac{e^{3x}}{9}$
6	$-$ $\frac{e^{3x}}{27}$
0	$\frac{e^{3x}}{71}$

$$\int e^{3x}x^3dx=\frac{x^3e^{3x}}{3}-\frac{3x^2e^{3x}}{9}+\frac{6xe^{3x}}{27}-\frac{6e^{3x}}{71}+c$$

$$=\frac{x^3e^{3x}}{3}-\frac{x^2e^{3x}}{3}+\frac{2xe^{3x}}{9}-\frac{2e^{3x}}{27}+c$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\left[x^3-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{2}{9}\right]+c$$

กรณีที่ 2 คือใช้วิธีลัดแล้วได้คำตอบในรูปของฟังก์ชันที่ต้องอินทิเกรตอีก มีขั้นตอนการหาคำตอบดังนี้

- เลือก u และ dv เหมือนเดิม แล้วใส่ u และ dv ลงในตารางที่ถูกแบ่งออกเป็นสองช่อง คือ ช่อง D ให้ใส่ u เป็นการหาค่าอนุพันธ์ และช่อง I ให้ใส่ dv เป็นการหาค่าอินทิเกรต

- ในช่อง D ที่หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนี้จะไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นให้ทำการอินทิกรัลของฟังก์ชันในช่อง I อินทิเกรตฟังก์ชันนั้นไปจนกระทั่งฟังก์ชันมีรูปแบบซ้ำเป็นฟังก์ชันเดิม (ซึ่งส่วนมากจะเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ) แล้วที่ช่อง D หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับจำนวนครั้งของการอินทิเกรตที่ช่อง I

- ระหว่างช่อง D และช่อง I ให้คูณทะแยงมุมลงด้านล่าง (เขียนเป็นลูกศรชี้ลง) เริ่มที่ด้านช่อง D ซึ่งในการคูณทะแยงมุมแต่ละครั้งให้ใส่เครื่องหมายบวก (+) และลบ (-) สลับกัน และที่เพิ่มขึ้นมาเป็นการคูณกันของบรรทัดสุดท้ายตามลูกศรระหว่างช่อง D และช่อง I นำผลคูณในบรรทัดสุดท้ายมาทำการอินทิเกรต $\int$

ตัวอย่างที่ 5.57 จงหาค่า $\int e^{3x}\sin(3x)dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $u=e^{3x}$ และ $dv=\sin(3x)dx$ หาค่า จะได้ du และ v ดังตาราง

ช่อง D	ช่อง I
e^{3x}	$+$ $\sin(3x)$
$3e^{3x}$	$-$ $\frac{-\cos(3x)}{3}$
$9e^{3x}$	$+$ $\frac{-\sin(3x)}{9}$

$$\int e^{3x}\sin(3x)dx=\frac{-e^{3x}\cos(3x)}{3}+\frac{e^{3x}\sin(3x)}{3}-\int 9e^{3x}\frac{\sin(3x)}{9}dx$$

$$=\frac{-e^{3x}\cos(3x)}{3}+\frac{e^{3x}\sin(3x)}{3}-\int e^{3x}\sin(3x)dx$$

$$\int e^{3x}\sin(3x)dx+\int e^{3x}\sin(3x)dx=\frac{-e^{3x}\cos(3x)}{3}+\frac{e^{3x}\sin(3x)}{3}$$

$$(1+1)\int e^{3x}\sin(3x)dx=\frac{-e^{3x}\cos(3x)}{3}+\frac{e^{3x}\sin(3x)}{3}$$

$$2\int e^{3x}\sin(3x)dx = \frac{-e^{3x}\cos(3x)}{3}+\frac{e^{3x}\sin(3x)}{3}$$

$$\int e^{3x}\sin(3x)dx = \frac{-e^{3x}\cos(3x)}{6}+\frac{e^{3x}\sin(3x)}{6}+c$$

5.4.2 การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อยช่วยให้สามารถหาค่าฟังก์ตัวถูกอินทิเกรตที่อยู่ในรูปเศษส่วนได้ โดยพิจารณาฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของเศษส่วนซึ่งจะต้องเป็นเศษส่วนแท้ แล้วทำให้ฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปของผลบวกของเศษส่วนย่อย วิธีการแยกเศษส่วนย่อย (method of partial fraction) มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ให้พิจารณาฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตว่าเป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้หรือไม่ (คือพิจารณาว่ากำลังของเศษน้อยกว่ากำลังของส่วนหรือไม่) ถ้าเป็นแล้วให้ทำขั้นตอนที่ 2 ต่อ ถ้ายังไม่เป็นให้นำส่วนหารเศษแล้วนำเอาเศษส่วนเฉพาะที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้เท่านั้นไปทำขั้นตอนที่ 2 ต่อ

ขั้นที่ 2 ให้นำเอาตัวส่วนของตัวถูกอินทิเกรต มาแยกตัวประกอบให้ถึงที่สุด สามารถแยกตัวประกอบที่เป็นไปได้ 2 แบบ ดังนี้

1. **ตัวประกอบแบบเชิงเส้น** (linear factor) คือตัวประกอบที่มีกำลังของตัวแปรสูงสุดเป็น 1 มีรูปทั่วไปคือ $ax+b$ เมื่อ a,b เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ $a\neq 0$ เช่น $2x+3$, $3x-4$, $x+3$ และ x เป็นต้น

2. **ตัวประกอบกำลังสอง** (quadratic factor) คือตัวประกอบที่มีกำลังของตัวแปรสูงสุดเป็น 2 มีรูปทั่วไปคือ ax^2+bx+c เมื่อ a,b,c เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ $a\neq 0$ เช่น $2x^2+3x+1$, $3x^2-4$, x^2-2x-1 และ x^2+1 เป็นต้น

ถ้าฟังก์ชันใดที่ตัวส่วนไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ ฟังก์ชันนั้นก็ไม่สามารถแยกเป็นเศษส่วนย่อยเพื่อหาค่าอินทิเกรตได้

ขั้นที่ 3 นำตัวถูกอินทิเกรตที่เป็นฟังก์ชันตกรรยะแท้ซึ่งแยกตัวประกอบตัวส่วนไว้เรียบร้อยแล้ว มาเขียนในรูปของผลบวกของเศษส่วนย่อย มีวิธีการเขียนผลบวกของเศษส่วนย่อยเป็น 4 กรณี ตามลักษณะตัวประกอบของตัวส่วน ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าตัวประกอบของตัวส่วนเป็นตัวประกอบเชิงเส้นที่ต่างกัน (district linear factor) สมมติเป็น $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)....(a_nx+b_n)$ มี n ตัวประกอบ เขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วนได้ดังนี้

$\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)}+....+\frac{A_n}{(a_nx+b_n)}$ เมื่อ $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

เช่น

NPRU

$$\frac{x+3}{(3x-2)(x+2)}=\frac{A}{(3x-2)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$\frac{x+3}{(x+2)(x^2+2x-24)}=\frac{x+3}{(x+2)(x+6)(x-4)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+6)}+\frac{C}{(x-4)}$$

อาจจะใช้ $A, B, C, ...$ แทน $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ก็ได้ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหาค่าในขั้นตอนต่อไป

กรณีที่ 2 ถ้าตัวประกอบของตัวส่วนเป็นตัวประกอบเชิงเส้นที่ซ้ำกัน (repeat linear factor) สมมติเป็น $(ax+b)(ax+b)....n=(ax+b)^n$ มีตัวส่วน n ตัวประกอบที่ซ้ำกัน สามารถเขียนผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วน ดังนี้

$$\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+....+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$ เมื่อ $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

เช่น

$$\frac{4x+3}{(3x-2)^2}=\frac{A}{(3x-2)}+\frac{B}{(3x-2)^2}$$

$$\frac{2x-1}{(x+2)^4}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}+\frac{D}{(x+2)^4}$$

กรณีที่ 3 ถ้าตัวประกอบของตัวส่วนเป็นตัวประกอบกำลังสองที่ต่างกัน (district quadratic factor) สมมติเป็น $(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)(a_3x^2+b_3x+c_3)....(a_nx^2+b_nx+c_n)$ มีตัวส่วน n ตัวประกอบที่ต่างกัน สามารถเขียนผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วน ดังนี้

$$\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+\frac{A_3x+B_3}{(a_3x^2+b_3x+c_3)}+....+\frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$ เมื่อ

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ และ $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

เช่น

$$\frac{4x+3}{(3x^2-2x+1)(2x^2+1)}=\frac{Ax+B}{(3x^2-2x+1)}+\frac{Cx+D}{(2x^2+1)}$$

$$\frac{x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+3x-1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x-1)}$$

กรณีที่ 4 ถ้าตัวประกอบของตัวส่วนเป็นตัวประกอบกำลังสองที่ซ้ำกัน (repeat quadratic factor) สมมติเป็น $(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+c)....n=(ax^2+bx+c)^n$ มีตัวส่วน n ตัวประกอบที่ซ้ำกัน สามารถเขียนผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วน ดังนี้

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+....+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$ เมื่อ $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ และ

$B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ เป็นค่าคงที่ที่จะต้องหา

เช่น

$$\frac{4x+3}{\left(x^2-4x+6\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2-4x+6\right)}+\frac{Cx+D}{\left(x^2-4x+6\right)^2}$$

$$\frac{x^2-4x+6}{\left(2x^2+6\right)^3}=\frac{Ax+B}{\left(2x^2+6\right)}+\frac{Cx+D}{\left(2x^2+6\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(2x^2+6\right)^3}$$

ขั้นที่ 4 เมื่อแยกตัวประกอบและเขียนอยู่ในรูปของผลรวมของเศษส่วนย่อยแล้ว ทำการแก้สมการให้ตัวส่วนหมดไป แล้วนำสมการที่ได้ไปหาค่าคงที่ โดยมีวิธีหา 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 หาคงที่ที่เหมาะสมแทนในตัวแปรของสมการ แล้วทำให้ได้ค่าคงที่ $A, B, C, \ldots$ ได้ทันที

วิธีที่ 2 ใช้วิธีการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ โดยจัดพจน์ให้มีระเบียบก่อนแล้วทำการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x ที่มีกำลังเท่นกันทางด้านซ้ายของสมการกับด้านขวาของสมการ (โดยเป็นการเปรียบเทียบว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x ที่มีกำลังเท่นกันทางด้านซ้ายของสมการกับด้านขวาของสมการจะต้องเท่ากัน)

เมื่อทำการหาค่าตัวคงที่ $A, B, C, \ldots$ ได้ครบทุกตัวแล้ว ด้วยวิธีใดก็ตามข้างต้น ให้แทนค่าคงที่กลับลงไปในสมการที่ได้แยกเป็นเศษส่วนย่อยไว้ในขั้นที่ 3 นั้น

ขั้นที่ 5 จากสมการที่ได้แยกเป็นเศษส่วนย่อยไว้ในขั้นที่ 3 ใส่เครื่องหมายอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ แล้วหาค่าอินทิกรัลโดยใช้สูตรอินทิเกรตเบื้องต้น และบวกค่า c จะได้คำตอบ

ตัวอย่างที่ 5.58 จงหาค่า $\int \frac{(2x+3)}{(x-2)\left(x^2+2x+1\right)}dx$

วิธีทำ

จาก $\frac{(2x+3)}{(x-2)\left(x^2+2x+1\right)}=\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)(x+1)}=\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)^2}$ ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วยย่อย ดังนี้

$$\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

หาค่าคงที่ A, B, C โดยจัดรูปและการสมการ จะได้

$$(2x+3)=\frac{A\,(x-2)(x+1)^2}{(x-2)}+\frac{B\,(x-2)(x+1)^2}{(x+1)}+\frac{C\,(x-2)(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$(2x+3)=A\,(x+1)^2+B\,(x-2)(x+1)+C\,(x-2)$$

$$(2x+3)=A\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2-x-2\right)+C\,(x-2)$$

$$(2x+3) = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx - 2C$$

ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของตัวแปรเท่ากัน จะได้

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x^2 จะได้สมการ $A + B = 0$ ------------------------- (1)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x จะได้สมการ $2A - B + C = 2$ ------------------- (2)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ที่เป็นค่าคงที่จะได้สมการ $A - 2B - 2C = 3$ ----------------- (3)

นำ 2 คูณ (2) จะได้ $4A - 2B + 2C = 4$ ---------------- (4)

นำ (3) + (4) จะได้ $5A - 4B = 7$ ------------------------ (5)

นำ 5 คูณ (1) จะได้ $5A + 5B = 0$ ------------------------ (6)

นำ (5) - (6) จะได้ $-9B = 7$

$$B = -\frac{7}{9}$$

จากสมการ (1) แทนค่า $B = -\frac{7}{9}$ จะได้ $A = \frac{7}{9}$

จากสมการ (2) แทนค่า $B = -\frac{7}{9}$ และ $A = \frac{7}{9}$ จะได้ $2\left(\frac{7}{9}\right) - \left(-\frac{7}{9}\right) + C = 2$

$$\frac{14}{9} + \frac{7}{9} + C = 2$$

$$\frac{21}{9} + C = 2$$

$$C = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$$

แทนค่า A,B,C ลงในสมการ $\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$ จะได้

$$\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{\left(\frac{7}{9}\right)}{(x-2)} + \frac{\left(-\frac{7}{9}\right)}{(x+1)} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{7}{9(x-2)} - \frac{7}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}$$

หาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันนี้ จะได้

$$\int \frac{(2x+3)}{(x-2)(x+1)^2}dx = \int \left[\frac{7}{9(x-2)} - \frac{7}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}\right]dx$$

$$= \int \frac{7}{9(x-2)}dx - \int \frac{7}{9(x+1)}dx - \int \frac{1}{3(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{7}{9}\int \frac{1}{(x-2)}dx - \frac{7}{9}\int \frac{1}{(x+1)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{7}{9}\int \frac{1}{(x-2)}d(x-2) - \frac{7}{9}\int \frac{1}{(x+1)}d(x+1) - \frac{1}{3}\int (x+1)^{-2}d(x+1)$$

$$=\frac{7}{9}\ln|(x-2)|-\frac{7}{9}\ln|(x+1)|-\frac{1}{3}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{7}{9}\ln|(x-2)|-\frac{7}{9}\ln|(x+1)|+\frac{1}{3(x+1)}+c$$

ตัวอย่างที่ 5.59 จงหาค่า $\int \frac{x^2+2}{x^3+2x^2+x}dx$

วิธีทำ

จาก $\frac{x^2+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}$ ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย ดังนี้

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

หาค่าคงที่ A,B,C โดยจัดรูปและแก้สมการ จะได้

$$x^2+2=\frac{Ax(x+1)^2}{x}+\frac{Bx(x+1)^2}{(x+1)}+\frac{Cx(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$x^2+2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

$$x^2+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$

$$x^2+2=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$

ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของตัวแปรเท่ากัน จะได้

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x^2 จะได้สมการ $A+B=1$ ---------------------------- (1)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x จะได้สมการ $2A+B+C=0$ --------------------- (2)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ที่เป็นค่าคงที่จะได้สมการ $A=2$ --------------------------------- (3)

แทน $A=2$ ลงใน (1) จะได้ $2+B=1$

$$B=-1$$

แทน $A=2$ และ $B=-1$ ลงใน (2) จะได้ $2(2)+(-1)+C=0$

$$C=-3$$

แทนค่า A,B,C ลงในสมการ $\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$ จะได้

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{(-1)}{(x+1)}+\frac{(-3)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{(x+1)}-\frac{3}{(x+1)^2}$$

หาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันนี้ จะได้

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}dx &= \int\left[\frac{2}{x}-\frac{1}{(x+1)}-\frac{3}{(x+1)^2}\right]dx\\ &= \int\frac{2}{x}dx-\int\frac{1}{(x+1)}dx-\int\frac{3}{(x+1)^2}dx\\ &= 2\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{(x+1)}d(x+1)-3\int(x+1)^{-2}d(x+1)\\ &= 2\ln|x|-\ln|(x+1)|-3\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c\\ &= 2\ln|x|-\ln|(x+1)|+\frac{3}{(x+1)}+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.60 จงหาค่า $\int\frac{6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}dx$

วิธีทำ

จาก $\frac{6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}$ สามารถเขียนฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย ดังนี้

$$\frac{6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

หาค่าคงที่ A,B,C,D โดยจัดรูปและแก้สมการ จะได้

$$\frac{6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

$$6x+3=\frac{A(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}{(x-1)}+\frac{B(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}{(x+2)}+\frac{(Cx+D)(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)}$$

$$6x+3=A(x+2)(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)(x+2)$$

$$6x+3=A(x^3+3x^2+3x+2)+B(x^3-1)+(Cx+D)(x^2+x-2)$$

$$6x+3=Ax^3+3Ax^2+3Ax+2A+Bx^3-B+Cx^3+Cx^2-2Cx+Dx^2+Dx-2D$$

ใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังของตัวแปรเท่ากัน จะได้

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x^3 จะได้สมการ $A+B+C=0$ ------------------ (1)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x^2 จะได้สมการ $3A+C+D=0$ ---------------- (2)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ตัวแปร x จะได้สมการ $3A - 2C + D = 6$ -------------- (3)

เทียบสัมประสิทธิ์พจน์ที่เป็นค่าคงที่จะได้สมการ $2A - B - 2D = 3$ -------------- (4)

ใช้เมทริกซ์แก้สมการหลายตัวแปร โดยเขียนเป็นเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

หาดีเทอร์มิแนนท์กำหนดให้เป็น $\det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -27$

หา $A = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\det(U)} = \dfrac{-27}{-27} = 1$

หา $B = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\det(U)} = \dfrac{-27}{-27} = 1$

หา $C = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\det(U)} = \dfrac{54}{-27} = -2$

หา $D = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det(U)} = \dfrac{27}{-27} = -1$

เพราะฉะนั้นจะได้ $A = 1, B = 1, C = -2, D = -1$ นำไปแทนค่าลงในสมการผลบวกของเศษส่วนย่อยจากโจทย์ จะได้

$$\frac{6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} + \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)}$$

หาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันนี้ จะได้

NPRU

$$
\begin{aligned}
\int \frac{6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}dx &= \int \left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)}\right]dx \\
&= \int \frac{1}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x+2)}dx - \int \frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)}dx \\
&= \int \frac{1}{(x-1)}d(x-1) + \int \frac{1}{(x+2)}d(x+2) - \int \frac{1}{(x^2+x+1)}d(x^2+x+1) \\
&= \ln|(x-1)| + \ln|(x+2)| - \ln|(x^2+x+1)| + c \\
&= \ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2+x+1)}\right| + c
\end{aligned}
$$

5.4.3 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตรีโกณมิติ

การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตรีโกณมิติสามารถช่วยให้แก้โจทย์การอินทิเกรตฟังก์ชันที่ไม่สามารถใช้สูตรอินทิเกรตเบื้องต้นได้ และฟังก์ชันตัวที่ถูกอินทิเกรตจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่มีลักษณะ $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2+u^2}$ และ $\sqrt{u^2-a^2}$ ประกอบอยู่ หรืออาจจะเป็น $a^2-u^2, a^2+u^2, u^2-a^2$ และอาจจะมียกกำลังบางค่า อาทิเช่น $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$, $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2}dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{10+2x-x^2}}dx$ เป็นต้น การใช้เทคนิคการอินทิเกรตด้วยวิธีนี้จะทำการเปลี่ยนตัวแปรเดิมให้เป็นตัวแปรใหม่ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีหลักการดังนี้

1. หาฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรตที่อยู่ในรูป $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2+u^2}$ และ $\sqrt{u^2-a^2}$ ฟังก์ชันเหล่านี้อาจจะมีลักษณะที่เห็นแล้วเข้ารูปแบบเลย แต่บางข้อจะต้องทำการจัดรูปเพื่อให้เข้ารูปแบบ

2. เมื่อฟังก์ชันอยู่ในรูปใด ให้สมมติดังนี้

ถ้าอยู่ในรูป $\sqrt{a^2-u^2}$ ให้สมมติ $u = a\sin(\theta)$ หรือ $u = a\cos(\theta)$ และใช้สูตรคุณสมบัติตรีโกณมิติ $1-\sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$

ถ้าอยู่ในรูป $\sqrt{a^2+u^2}$ ให้สมมติ $u = a\tan(\theta)$ หรือ $u = a\cot(\theta)$ และใช้สูตรคุณสมบัติตรีโกณมิติ $1+\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$

ถ้าอยู่ในรูป $\sqrt{u^2-a^2}$ ให้สมมติ $u = a\sec(\theta)$ หรือ $u = a\,\mathrm{cosec}(\theta)$ และใช้สูตรคุณสมบัติตรีโกณมิติ $\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$

จากนั้นสามารถจัดรูปฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากความสัมพันธ์ดังนี้

ถ้าให้รูป $u = a\sin(\theta)$ จะได้ $\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-(a\sin(\theta))^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2(\theta)}$
$= \sqrt{a^2(1-\sin^2(\theta))} = \sqrt{a^2\cos^2(\theta)} = a\cos(\theta)$

ถ้าให้รูป $u = a\tan(\theta)$ จะได้ $\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+(a\tan(\theta))^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2(\theta)}$
$= \sqrt{a^2(1+\tan^2(\theta))} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta)} = a\sec(\theta)$

ถ้าให้รูป $u = a\sec(\theta)$ จะได้ $\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{(a\sec(\theta))^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta)-a^2}$
$= \sqrt{a^2(\sec^2(\theta)-1)} = \sqrt{a^2\tan^2(\theta)} = a\tan(\theta)$

3. เปลี่ยนฟังก์ชันตัวถูกให้อยู่ในรูปของตัวแปรใหม่คือ θ โดยการแทนค่าสิ่งที่สมมติไว้แก้สมการหาค่า a และ u ทำให้ฟังก์ชันที่ได้เปลี่ยนเป็นรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มี θ เป็นตัวแปร แล้วสามารถหาค่าอินทิกรัลนี้ได้ด้วยสูตรต่างๆ ที่ผ่านมา

4. ผลลัพธ์ที่ได้จากการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันจากข้อที่ 3 จะอยู่ในรูปของตัวแปรใหม่ θ ให้เปลี่ยนตัวแปรกลับเป็นตัวแปรเดิม โดยใช้สามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีปีทากอรัสในการหาความยาวของด้านทั้งสาม เพื่อหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการ แล้วแทนค่ากลับลงไปในผลลัพธ์ทำให้ได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของตัวแปรเดิม

ตัวอย่างที่ 5.61 จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$

วิธีทำ

นำ $\sqrt{25-x^2}$ จัดรูปใหม่จะได้ $\sqrt{5^2-x^2}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\sqrt{a^2-u^2}$ โดย $a=5$ และ $u=x$
สมมติให้ $u = a\sin(\theta)$ จะได้

$u = a\sin(\theta)$ แทนค่า $a=5$ และ $u=x$ $\qquad x = 5\sin(\theta)$

หา dx ; $\qquad dx = \frac{d}{d\theta}[5\sin(\theta)] = 5\cos(\theta)d\theta$

หา $\sqrt{25-x^2}$; แทนค่า $x = 5\sin(\theta)$ $\qquad \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin(\theta))^2} = \sqrt{5^2-5^2\sin^2(\theta)}$

$$= \sqrt{5^2(1-\sin^2(\theta))} = \sqrt{5^2\cos^2(\theta)}$$

$$= 5\cos(\theta)$$

แทนค่าจากโจทย์

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = \int \frac{5\cos(\theta)}{5\sin(\theta)}5\cos(\theta)d\theta$$

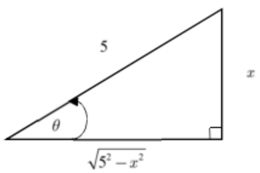
$$= 5\int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta = 5\int \frac{1-\sin^2(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta$$

$$= 5\left[\int \frac{1}{\sin(\theta)}d\theta - \int \frac{\sin^2(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta\right]$$

$$= 5\left[\int \operatorname{cosec}(\theta)d\theta - \int \sin(\theta)d\theta\right]$$

$$= 5\left[\ln\left|\operatorname{cosec}(\theta) - \cot(\theta)\right| + \cos(\theta)\right] + c$$

เปลี่ยนตัวแปรกลับเป็น x โดยจากที่สมมติไว้ข้างต้น



จาก $\quad x = 5\sin(\theta)\,; \qquad \sin(\theta) = \frac{x}{5}$

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}$$

$$\operatorname{cosec}(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{5}{x}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \left(\frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{x}\right) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$$

แทนค่าตัวแปรกลับ จะได้

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}dx = 5\left[\ln\left|\operatorname{cosec}(\theta) - \cot(\theta)\right| + \cos(\theta)\right] + c$$

$$= 5\left[\ln\left|\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}\right] + c$$

$$= 5\ln\left|\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{25 - x^2} + c$$

ตัวอย่างที่ 5.62 จงหาค่า $\int x^3\sqrt{9 + 4x^2}dx$

วิธีทำ

นำ $\sqrt{9 + 4x^2}$ จัดรูปใหม่จะได้ $\sqrt{3^2 + (2x)^2}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\sqrt{a^2 + u^2}$ โดย $a = 3$ และ $u = 2x$ สมมติให้ $u = a\tan(\theta)$ จะได้

$u = a\tan(\theta)$; แทนค่า $a = 3$ และ $u = 2x$ จะได้ $2x = 3\tan(\theta)$

$$x = \frac{3}{2}\tan(\theta)$$

หา x^3: $\quad x^3 = \left[\frac{3}{2}\tan(\theta)\right]^3 = \frac{27}{8}\tan^3(\theta)$

หา dx ; $\quad dx = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{3}{2}\tan(\theta)\right] = \frac{3}{2}\frac{d}{d\theta}\tan(\theta) = \frac{3}{2}\sec^2(\theta)d\theta$

หา $\sqrt{9 + 4x^2}$; $\quad \sqrt{9 + 4x^2} = \sqrt{3^2 + (2x)^2} = \sqrt{9 + 4\left(\frac{3}{2}\tan(\theta)\right)^2}$

$$= \sqrt{9+9\tan^2(\theta)} = \sqrt{9\left(1+\tan^2(\theta)\right)}$$

$$= \sqrt{3^2\left(\sec^2(\theta)\right)} = 3\sec(\theta)$$

แทนค่าจากโจทย์

$$\int x^3\sqrt{9+4x^2}\,dx = \int \frac{27}{8}\tan^3(\theta)3\sec(\theta)\frac{3}{2}\sec^2(\theta)d\theta$$

$$= \frac{243}{16}\int \tan^3(\theta)\sec^3(\theta)d\theta$$

$$= \frac{243}{16}\int \tan^2(\theta)\tan(\theta)\sec^2(\theta)\sec(\theta)d\theta$$

$$= \frac{243}{16}\int \left[\sec^2(\theta)-1\right]\sec^2(\theta)\tan(\theta)\sec(\theta)d\theta$$

$$= \frac{243}{16}\int \left[\sec^4(\theta)-\sec^2(\theta)\right]d\sec(\theta)$$

$$= \frac{243}{16}\left[\int \sec^4(\theta)d\sec(\theta)-\int \sec^2(\theta)d\sec(\theta)\right]$$

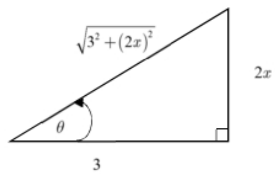
$$= \frac{243}{16}\left[\frac{\sec^5(\theta)}{5}-\frac{\sec^3(\theta)}{3}\right]+c$$

เปลี่ยนตัวแปรกลับเป็น x โดยจากที่สมมติไว้ข้างต้น

จาก $2x = 3\tan(\theta)$; $\tan(\theta) = \frac{2x}{3}$

$$\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{9+4x^2}}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}$$



แทนค่าตัวแปรกลับ จะได้

$$\int x^3\sqrt{9+4x^2}\,dx = \frac{243}{16}\left[\frac{\sec^5(\theta)}{5}-\frac{\sec^3(\theta)}{3}\right]+c$$

$$= \frac{243}{16}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}\right)^5}{5}-\frac{\left(\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3}\right)^3}{3}\right]+c$$

$$= \frac{243}{16}\left[\frac{\left(\sqrt{9+4x^2}\right)^5}{5(3)^5}-\frac{\left(\sqrt{9+4x^2}\right)^3}{3(3)^3}\right]+c = \frac{\left(9+4x^2\right)^{5/2}}{80}-\frac{3\left(9+4x^2\right)^{3/2}}{16}+c$$

ตัวอย่างที่ 5.63 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}}$

วิธีทำ

นำ $\sqrt{4x^2-9}$ จัดรูปใหม่จะได้ $\sqrt{(2x)^2-3^2}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\sqrt{u^2-a^2}$ โดย $a=3$ และ $u=2x$

สมมติให้ $u=a\sec(\theta)$ จะได้

$u=a\sec(\theta)$; แทนค่า $a=3$ และ $u=2x$ $\quad 2x=3\sec(\theta)$

$$x=\frac{3}{2}\sec(\theta)$$

หา x^2 :

$$x^2=\left[\frac{3}{2}\sec(\theta)\right]^2=\frac{9}{4}\sec^2(\theta)$$

หา dx ;

$$dx=\frac{d}{d\theta}\left[\frac{3}{2}\sec(\theta)\right]=\frac{3}{2}\frac{d}{d\theta}\sec(\theta)=\frac{3}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$$

หา $\sqrt{4x^2-9}$;

$$\sqrt{4x^2-9}=\sqrt{(2x)^2-3^2}=\sqrt{4\left(\frac{3}{2}\sec(\theta)\right)^2-9}$$

$$=\sqrt{9\sec^2(\theta)-9}=\sqrt{9\left(\sec^2(\theta)-1\right)}$$

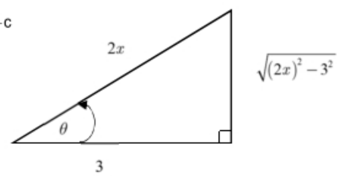
$$=\sqrt{3^2\left(\tan^2(\theta)\right)}=3\tan(\theta)$$

แทนค่าจากโจทย์

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}}=\int\left(\frac{3}{2}\frac{4}{9}\frac{\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta}{\sec^2(\theta)3\tan(\theta)}\right)=\frac{2}{9}\int\frac{1d\theta}{\sec(\theta)}$$

$$=\frac{2}{9}\int\cos(\theta)d\theta=\frac{2}{9}\sin(\theta)+c$$

เปลี่ยนตัวแปรกลับเป็น x โดยจากที่สมมติไว้ข้างต้น



จาก $\quad 2x=3\sec(\theta)$; $\quad \sec(\theta)=\frac{2x}{3}$

$$\sec(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)}=\frac{2x}{3}$$

$\cos(\theta)=\frac{3}{2x}$ และ $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{(2x)^2-3^2}}{2x}$

แทนค่าตัวแปรกลับ จะได้

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}}=\frac{2}{9}\sin(\theta)+c$$

$$=\frac{2}{9}\frac{\sqrt{(2x)^2-3^2}}{2x}+c=\frac{\sqrt{4x^2-9}}{9x}+c$$

NPRU

5.4.4 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่

เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่ (integration by substitution of a new variables) ช่วยหาค่าอินทิกรัลที่ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานได้ ฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปฟังก์ชันที่มีพจน์ตัวแปร x หรือพจน์ $ax+b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ นิพจน์ทั้งสองยกกำลังเป็นเศษส่วนประกอบอยู่ ช่วยเปลี่ยนกำลังที่เป็นเศษส่วนกลายเป็นจำนวนเต็ม ทำให้ง่ายต่อการหาค่าอินทิเกรต มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติความสัมพันธ์ของตัวแปรเดิมและตัวแปรใหม่ดังนี้

1. ถ้าตัวถูกอินทิเกรตมีพจน์ตัวแปร x ยกกำลังเศษส่วนประกอบอยู่ สมมติให้ $x=z^n$ เมื่อ x คือตัวแปรเดิม และ z เป็นตัวแปรใหม่ n เป็นคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของส่วนของเศษส่วนที่เป็นกำลังของ x ทุกตัวที่อยู่ในฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรต

2. ถ้าตัวถูกอินทิเกรตมีพจน์เป็น $(ax+b)$ ยกกำลังเศษส่วนประกอบอยู่ สมมติให้ $(ax+b)=z^n$ เมื่อ $(ax+b)$ คือนิพจน์เดิม และ z เป็นตัวแปรใหม่ n เป็นคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ของส่วนของเศษส่วนที่เป็นกำลังของ $(ax+b)$ ทุกตัวที่อยู่ในฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรต

ขั้นที่ 2 แทนค่าตัวแปรใหม่ในฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรต และหาค่าอินทิกรัลโดยใช้หลักการต่างๆ ที่ผ่านมา

ขั้นที่ 3 เมื่อหาค่าอินทิเกรตได้แล้ว ให้เปลี่ยนตัวแปรกลับ โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ได้สมมติไว้ในขั้นที่ 1

ตัวอย่างที่ 5.64 จงหาค่า $\int x^3\sqrt{3x+2}\,dx$

วิธีทำ

สมมติให้ $(3x+2)=z^2$ จะได้ $x=\dfrac{z^2-2}{3}$

หา dx ; $dx=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^2-2}{3}\right)=\dfrac{2z}{3}dz$

หา x^3; $x^3=\left(\dfrac{z^2-2}{3}\right)^3=\dfrac{(z^2-2)^3}{27}=\dfrac{1}{27}(z^6-6z^4+6z^2-8)$

แทนค่า
$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{3x+2}\,dx &= \int\frac{1}{27}(z^6-6z^4+6z^2-8)\sqrt{z^2}\,\frac{2z}{3}dz\\ &= \frac{2}{81}\int(z^6-6z^4+6z^2-8)z^2dz\\ &= \frac{2}{81}\int(z^8-6z^6+6z^4-8z^2)dz\\ &= \frac{2}{81}\left[\int z^8dz-\int 6z^6dz+\int 6z^4dz-\int 8z^2dz\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{81}\left[\frac{z^9}{9} - \frac{6z^7}{7} + \frac{6z^5}{5} - \frac{8z^3}{3}\right] + c$$

แทนค่าตัวแปรกลับ จาก $(3x+2) = z^2$; $z = (3x+2)^{1/2}$ จะได้

$$\int x^3\sqrt{3x+2}\,dx = \frac{2}{81}\left[\frac{z^9}{9} - \frac{6z^7}{7} + \frac{6z^5}{5} - \frac{8z^3}{3}\right] + c$$

$$= \frac{2}{81}\left[\frac{(3x+2)^{9/2}}{9} - \frac{6(3x+2)^{7/2}}{7} + \frac{6(3x+2)^{5/2}}{5} - \frac{8(3x+2)^{3/2}}{3}\right] + c$$

ตัวอย่างที่ 5.65 จงหาค่า $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

วิธีทำ

จากโจทย์ $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{1-x^{1/2}}{1+x^{1/4}}dx$ มีพจน์ $x^{1/2}$ และ $x^{1/4}$ มีกำลังเป็นเศษส่วน $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{4}$ สมมติให้ $x = z^n$ โดย $n = 4$ (ค.ร.น. ของ 2 และ 4)

$$x = z^4$$

หา dx ; $dx = \frac{d}{dz}(z^4) = 4z^3dz$

แทนค่า $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{1-x^{1/2}}{1+x^{1/4}}dx = \int \frac{1-(z^4)^{1/2}}{1+(z^4)^{1/4}}4z^3dz$

$$= \int \frac{1-z^2}{1+z}4z^3dz$$

$$= \int \frac{4z^3-4z^5}{1+z}dz$$

หารยาวจะได้ $= \int (4z^3 - 4z^4)dz$

$$= \int 4z^3dz - \int 4z^4dz$$

$$= \frac{4z^4}{4} - \frac{4z^5}{5} + c$$

$$= z^4 - \frac{4z^5}{5} + c$$

แทนค่าตัวแปรกลับ จาก $x = z^4$; $z = x^{1/4}$ จะได้

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx = z^4 - \frac{4z^5}{5} + c$$

$$=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4-\frac{4\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^5}{5}+c$$

$$=x-\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}+c$$

ตัวอย่างที่ 5.66 จงหาค่า $\int \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}-(x-2)^{\frac{3}{4}}}dx$

วิธีทำ

จากโจทย์มีนิพจน์ที่ยกกำลังเศษส่วน คือ $\frac{1}{2}$ และ $\frac{3}{4}$ สมมติให้ $(ax+b)=z^n$ คือ $(x-2)=z^4$ เมื่อ $n=4$ (ค.ร.น. ของ $\frac{1}{2}$ และ $\frac{3}{4}$)

กำหนดให้ $(x-2)=z^4$ จะได้ $x=z^4+2$

หา dx ; $\quad dx=\frac{d}{dz}(z^4+2)=4z^3dz$

แทนค่า $\int \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}-(x-2)^{\frac{3}{4}}}dx=\int \frac{1}{(z^4)^{\frac{1}{2}}-(z^4)^{\frac{3}{4}}}4z^3dz$

$$=\int \frac{1}{(z^4)^{\frac{1}{2}}-(z^4)^{\frac{3}{4}}}4z^3dz$$

$$=\int \frac{4z^3}{z^2-z^3}dz=\int \frac{4z^3}{z^2(1-z)}dz=\int \frac{4z}{(1-z)}dz$$

หารยาว จะได้ $\quad =\int\left[-4+\frac{4}{(1-z)}\right]dz=-\int 4dz+\int \frac{4}{(1-z)}dz$

$$=-4z-4\int \frac{1}{(1-z)}d(1-z)$$

$$=-4z-4\ln|(1-z)|+c$$

แทนค่าตัวแปรกลับ จาก $(x-2)=z^4$; $z=(x-2)^{\frac{1}{4}}$ จะได้

$$\int \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}}-(x-2)^{\frac{3}{4}}}dx=-4z-4\ln|(1-z)|+c$$

$$=-4(x-2)^{\frac{1}{4}}-4\ln\left|\left(1-(x-2)^{\frac{1}{4}}\right)\right|+c$$

NPRU

5.5 การอินทิเกรตแบบจำกัดเขตและการประยุกต์

การอินทิเกรตแบบจำกัดเขต (definite integral) ใช้สำหรับหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง หาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง หาความยาวของเส้นโค้ง หาจุดรวมมวล เป็นต้น นิยามโดยให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันมีค่าในช่วงปิด $[a,b]$ ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ หาค่าได้ กล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x)$ หาค่าอินทิเกรตได้ในช่วง $[a,b]$ และจะเรียกค่าลิมิตนี้ว่า อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ จาก a ถึง b และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \tag{5.1}$$

จาก $\int_a^b f(x)dx$ เรียก $f(x)$ ฟังก์ชันตัวถูกอินทิเกรต

a ลิมิตล่าง (lower limit) ของการอินทิเกรต

b ลิมิตบน (upper limit) ของการอินทิเกรต

คุณสมบัติของการอินทิเกรตจำกัดเขต กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

1. ถ้า $a>b$ แล้วจะได้ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ถ้า $\int_b^a f(x)dx$ หาค่าได้
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$ ถ้า $f(a)$ หาค่าได้
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
4. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ เมื่อ $f(x)\geq 0$ ทุกค่าของ $x\in[a,b]$
6. $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ เมื่อ $f(x)\leq g(x)$ ทุกค่าของ $x\in[a,b]$
7. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิดซึ่งมีสามจุดคือ a,b,c

5.5.1 การหาค่าอินทิเกรตจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$

ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus) กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ $f(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $F'(x) = f(x)$ ทุกค่าของ $x \in [a,b]$ แล้วจะได้

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{5.2}$$

ตัวอย่างที่ 5.67 จงหาค่า $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)dx$

วิธีทำ $\int_0^1 (x^3 - 2x + 1)dx$

$$= \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 2x dx + \int_0^1 1 dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + (x)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1^4 - 0^4)}{4}\right) - (1^2 - 0^2) + (1 - 0)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) - (1) + (1) = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างที่ 5.68 จงหาค่า $\int_1^3 (x+1)e^{(x^2+2x)}dx$

วิธีทำ $\int_1^3 (x+1)e^{(x^2+2x)}dx$

$$= \int_1^3 e^{(x^2+2x)}(x+1)dx$$

$$= \int_1^3 e^{(x^2+2x)} \frac{2(x+1)dx}{2} \quad = \int_1^3 e^{(x^2+2x)} \frac{(2x+2)dx}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 e^{(x^2+2x)}(2x+2)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 e^{(x^2+2x)}d(x^2+2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{(x^2+2x)}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[e^{(3^2+2(3))} - e^{(1^2+2(1))}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{(15)} - e^{(3)}\right] = \frac{e^3}{2}\left[e^{12} - 1\right]$$

ตัวอย่างที่ 5.69 จงหาค่า $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos(\theta)}\sin^{3}(\theta)d\theta$

วิธีทำ $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos(\theta)}\sin^{3}(\theta)d\theta$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \cos^{1/3}(\theta)\sin^{2}(\theta)\sin(\theta)d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \cos^{1/3}(\theta)\left(1-\cos^{2}(\theta)\right)\sin(\theta)d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \left(\cos^{1/3}(\theta)-\cos^{1/3}(\theta)\cos^{2}(\theta)\right)\frac{-\sin(\theta)d\theta}{-1}$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} \left(\cos^{1/3}(\theta)-\cos^{7/3}(\theta)\right)\left[-\sin(\theta)d\theta\right]$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} \left(\cos^{1/3}(\theta)-\cos^{7/3}(\theta)\right)d\cos(\theta)$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2} \cos^{1/3}(\theta)d\cos(\theta)+\int_{0}^{\pi/2} \cos^{7/3}(\theta)d\cos(\theta)$$

$$= -\left(\frac{3\cos^{4/3}(\theta)}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}+\left(\frac{3\cos^{10/3}(\theta)}{10}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2}$$

$$= \left[-\frac{3\cos^{4/3}(\pi/2)}{4}+\frac{3\cos^{4/3}(0)}{4}\right]+\left[\frac{3\cos^{10/3}(\pi/2)}{10}-\frac{3\cos^{10/3}(0)}{10}\right]$$

$$= \frac{3}{4}-\frac{3}{10}=\frac{30-12}{40}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$$

ตัวอย่างที่ 5.70 จงหาค่า $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} = \int_{1}^{16} \frac{dx}{x^{1/4}+x^{1/2}}$$

กำหนดให้ $x = z^{n}$ ซึ่ง $n = 4$ เป็น ค.ร.น. ของ $\frac{1}{4},\frac{1}{2}$ จะได้ $x = z^{4}$

หา dx ; $dx = \frac{d}{dz}\left(z^{4}\right) 4z^{3}dz$

แทนค่า $\int_{1}^{16}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} = \int_{1}^{16}\frac{4z^3dz}{(z^4)^{1/4}+(z^4)^{1/2}} = 4\int_{1}^{16}\frac{z^3dz}{z+z^2}$

$$= 4\int_{1}^{16}\frac{z^2dz}{1+z} = 4\int_{1}^{16}\frac{z^2dz}{z+1}$$

หารยาว จะได้ $= 4\int_{1}^{16}\left((z-1)+\frac{1}{(z+1)}\right)dz$

$$= 4\int_{1}^{16}(z-1)dz + 4\int_{1}^{16}\left(\frac{1}{z+1}\right)dzdz$$

$$= 4\left[\frac{z^2}{2}-z\right]_{1}^{16} + 4\ln\left|(z+1)\right|_{1}^{16}$$

แทนค่าตัวแปรกลับ $x = z^4$ จะได้ $z = x^{1/4}$

$$= 4\left[\frac{\left(x^{1/4}\right)^2}{2}-x^{1/4}\right]_{1}^{16} + 4\ln\left|\left(x^{1/4}+1\right)\right|_{1}^{16}$$

$$= 4\left[\frac{x^{1/2}}{2}-x^{1/4}\right]_{1}^{16} + 4\ln\left|\left(x^{1/4}+1\right)\right|_{1}^{16}$$

$$= 4\left[\frac{\left(16^{1/2}-1^{1/2}\right)}{2}-\left(16^{1/4}-1^{1/4}\right)\right] + 4\ln\left|\left(\left(16^{1/4}-1^{1/4}\right)+1\right)\right|$$

$$= 4\left[\frac{(4-1)}{2}-(2-1)\right] + 4\ln\left|(2-1)+1\right| = 2+4\ln(2)$$

5.5.2 การประยุกต์ใช้อินทิเกรตจำกัดเขต

การประยุกต์ใช้อินทิเกรตจำกัดเขตโดยส่วนมากใช้กับ การหาพื้นที่ การหาปริมาตร ความยาวเส้นโค้ง จุดรวมมวล โมเมนต์ และความเฉื่อย

1. การหาพื้นที่บนระนาบ

การหาพื้นที่บนระนาบด้วยวิธีการอินทิเกรตแบบจำกัดเขตนี้ แบ่งลักษณะการหาพื้นที่บนระนาบออกเป็น 2 แบบดังนี้

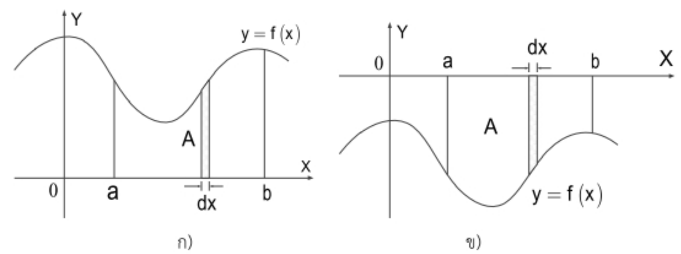
1.1 การหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งและแกน คือพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งและแกน x หรือแกน y ในที่นี้จะหาพื้นที่ในระนาบของแกน x และแกน y เท่านั้น โดยกำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ใด ๆ และให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

Technique Integral and Applications

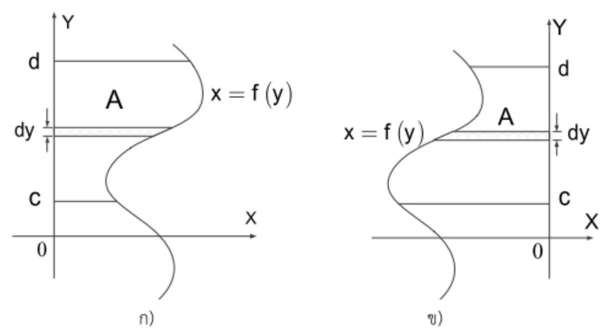
$y=f(x)$ และแกน x ดังภาพที่ 5.1 ลักษณะพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x มีพื้นที่ที่อยู่เหนือแกน x และพื้นที่ที่อยู่ใต้แกน x สามารถหาพื้นที่ด้วยการอินทิเกรตจำกัดเขตตามสมการที่ (5.3) และสมการที่ (5.4) ตามลำดับ

$$A=\int_a^b y\,dx \tag{5.3}$$

$$A=-\int_a^b y\,dx \tag{5.4}$$



ภาพที่ 5.1 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x



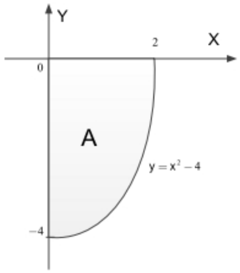
ภาพที่ 5.2 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y

ในทำนองเดียวกันนี้ถ้ากำหนดให้ $x = f(y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ ใด ๆ และให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ และแกน y ดังภาพที่ 5.2 ลักษณะพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y มีพื้นที่ที่อยู่ด้านซ้ายของแกน y และพื้นที่ที่อยู่ด้านขวาของแกน y สามารถหาพื้นที่ด้วยการอินทิเกรตจำกัดเขตตามสมการที่ (5.5) และสมการที่ (5.6) ตามลำดับ

$$A = -\int_c^d x\,dy \qquad (5.5)$$

$$A = \int_c^d x\,dy \qquad (5.6)$$

ตัวอย่างที่ 5.71 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 4$ กับแนวแกน y และ แกน x ดังภาพที่แสดง



วิธีทำ

พิจารณาได้ 2 กรณีคือบริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y และ บริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x

กรณีที่ 1 บริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน y

หาพื้นที่ได้จากสูตร $A = \int_c^d x\,dy$ พื้นที่อยู่ด้านขวาของแกน y

จาก $y = x^2 - 4$ จะได้

$x = \sqrt{y+4}$ ซึ่งตลอดช่วงปิด $y \in [-4, 0]$

$$\therefore \quad A = \int_{-4}^{0} \sqrt{y+4}\,dy$$

$$A = \int_{-4}^{0} (y+4)^{1/2}\,dy = \left.\frac{(y+4)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_{-4}^{0} = \frac{(0+4)^{\frac{3}{2}}}{3/2} - \frac{(-4+4)^{\frac{3}{2}}}{3/2}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)4^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \text{ ตร.หน่วย}$$

กรณีที่ 2 บริเวณล้อมรอบด้วยเส้นโค้งกับแกน x

หาพื้นที่ได้จากสูตร $A = -\int_a^b y\,dx$ พื้นที่อยู่ด้านขวาของแกน x

จาก $y = x^2 - 4$ จะได้ ซึ่งตลอดช่วงปิด $x \in [0, 2]$

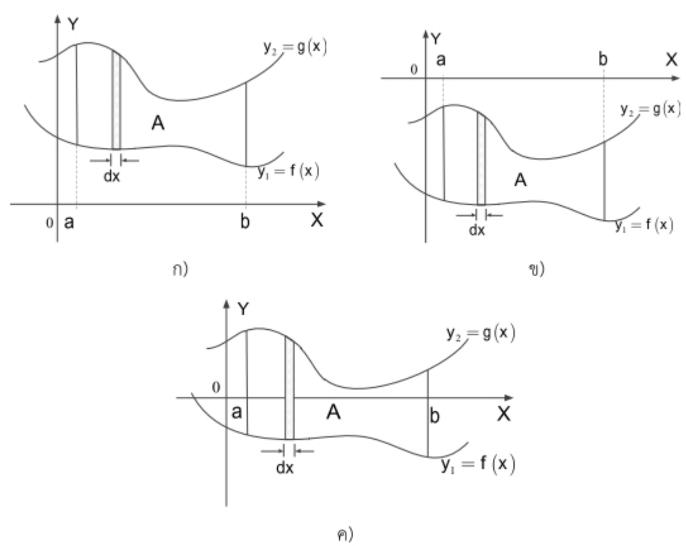
$$\therefore \quad A = -\int_0^2 (x^2 - 4)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_0^2 = -\left(\frac{2^3}{3} - 4(2)\right) + \left(\frac{0^3}{3} - 4(0)\right)$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{16}{3} \text{ ตร.หน่วย}$$

1.2 การหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งสองเส้น คือกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ใด ๆ โดยที่ $f(x) \le g(x)$ ทุกค่าของ $x \in [a,b]$ ในช่วงปิดนั้น และ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น $y_1 = f(x)$ และ $y_2 = g(x)$ มีเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ตัดผ่านที่ให้เกิดเป็นพื้นที่ A สามารถแบ่งเป็นสามกรณีดังภาพที่ 5.3 ลักษณะของพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น และขอบเขตช่วงปิดใด ๆ สามารถหาพื้นที่ A ได้ตามสมการที่ (5.7)

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx \tag{5.7}$$

เมื่อ $y_2 \ge y_1$ และ $b > a$

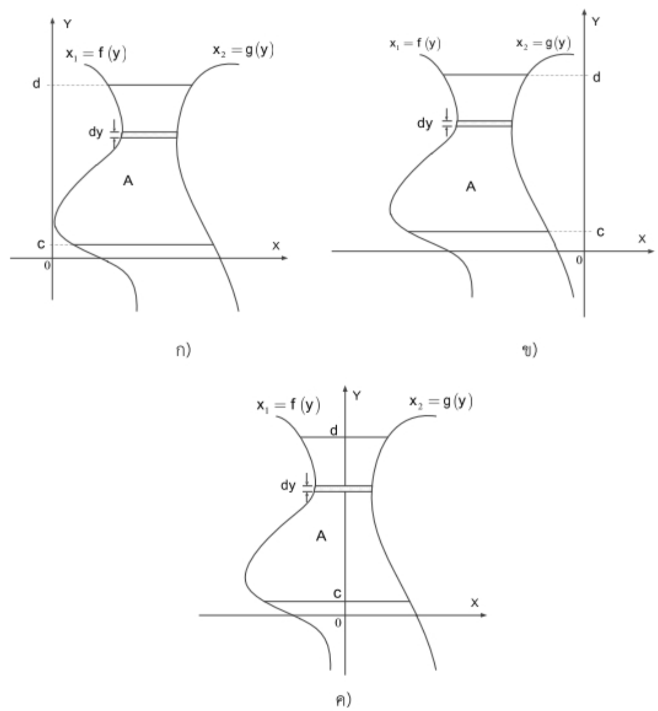


ภาพที่ 5.3 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้นมีสตริปขนานแกน y

ในทำนองเดียวกันกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(y)$ และ $g(y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ ใด ๆ โดยที่ $f(y) \leq g(y)$ ทุกค่าของ $y \in [c,d]$ ในช่วงปิดนั้น และ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น $x_1 = f(y)$ และ $x_2 = g(y)$ มีเส้นตรง $y = c$ และ $y = d$ ตัดผ่านที่ให้เกิดเป็นพื้นที่ A สามารแบ่งเป็นสามกรณีดังภาพที่ 5.4 ลักษณะของพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้น และขอบเขตช่วงปิดใด ๆ สามารถหาพื้นที่ A ได้ตามสมการที่ (5.8)

$$A = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dy \qquad (5.8)$$

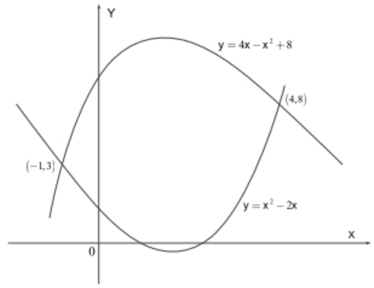
เมื่อ $x_2 \geq x_1$ และ $d > c$



ภาพที่ 5.4 ลักษณะบริเวณพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งสองเส้นมีสตริปขนานแกน x

Technique Integral and Applications

ตัวอย่างที่ 5.72 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2 + 8$, และเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x$ ดังภาพด้านล่างนี้



วิธีทำ

กำหนดให้ $y_1 = f(x)$ เป็น $y = x^2 - 2x$

และ $y_2 = f(x)$ เป็น $y = 4x - x^2 + 8$

จาก $A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

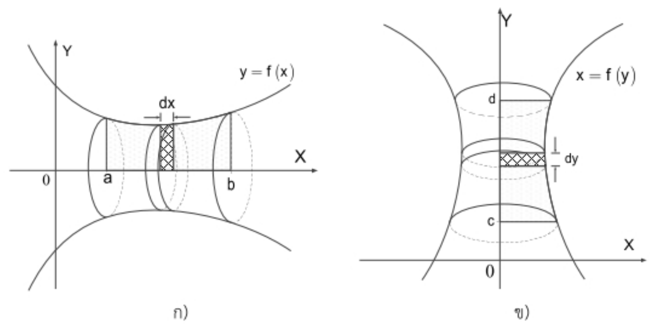
$$= \int_{-1}^{4} \left[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{4} (6x - 2x^2 + 8)dx$$

$$= \left(\frac{6x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + 8x\right)\Bigg|_{-1}^{4} = \left(3(4)^2 - \frac{2(4)^3}{3} + 8(4)\right) - \left(3(-1)^2 - \frac{2(-1)^3}{3} + 8(-1)\right)$$

$$= \left(48 - \frac{128}{3} + 32\right) - \left(3 + \frac{2}{3} - 8\right) = 85 - \frac{130}{3} = \frac{125}{3}$$

2. การหาปริมาตรด้วยวิธีการอินทิเกรต ในที่นี้ได้อธิบายวิธีการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนนี้ด้วยวิธีการอินทิเกรตเป็นสองแบบคือ การหาปริมาตรด้วยวิธีจาน (disk) และการหาค่าปริมาตรด้วยวิธีเปลือกทรงกระบอก



ภาพที่ 5.5 แสดงการหาปริมาตรเมื่อหมุนพื้นที่รอบแกน x และแกน y

กรณีที่ 1 วิธีหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกนด้วยวิธีจาน พิจารณาจากปริมาตรของรูปทรงกระบอก เท่ากับ $\pi r^2 h$ เมื่อ r คือรัศมี และ h คือความสูง ถ้าทำการเปรียบเทียบตามภาพที่ 5.5 จะได้ว่ารัศมีของจานคือค่า $y = f(x)$ เป็นค่า y ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และความสูงเท่ากับความหนาของจานก็คือ dx การเปลี่ยนแปลงของ x เมื่อพิจารณาแกนหมุนคือแกน x ตามภาพที่ 5.5 ก) ก็เช่นเดียวกันถ้าแกนหมุนเป็นแกน y ตามภาพที่ 5.5 ข) ค่ารัศมีคือค่า $x = f(y)$ เป็นค่า x ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y และความสูงเท่ากับความหนาของจานคือ dy การเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อพิจารณาแกนหมุนคือแกน y สามารถหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนรอบแกน x และแกน y ได้ตามสมการที่ (5.9) และ (5.10) ตามลำดับ

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{5.9}$$

สมการที่ (5.9) เมื่อแกนหมุนเป็นแกน x และ

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy \tag{5.10}$$

สมการที่ (5.10) เมื่อแกนหมุนเป็นแกน y

ตัวอย่างที่ 5.73 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $9x^2 + 4y^2 = 36$ ก) รอบแกน x ข) รอบแกน y

วิธีทำ

จากโจทย์ $9x^2 + 4y^2 = 36$ เป็นสมการวงรี สามารถเขียนอยู่ในรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

จะได้ $a = 3$ และ $b = 2$ ซึ่งมีแกนยาวทับแกน y มีจุดศูนย์กลางที่กำเนิด $(0,0)$

ก) หาปริมาตรหมุนรอบแกน y

โดยรัศมีเท่ากับ x ความหนาเท่ากับ dy ขอบเขตของการอินทิเกรตจาก $y = 0$ ถึง $y = 3$

จากสูตร $V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$ จะได้

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dy$$

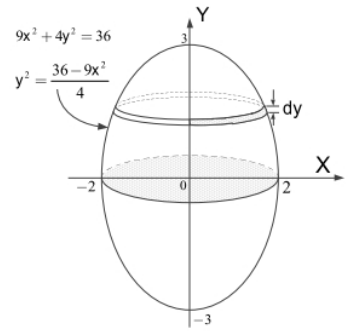
$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{36-4y^2}{9}\right) dy$$

$$= \frac{\pi}{9} \int_0^3 (36-4y^2) dy$$

$$= \frac{\pi}{9} \left[36x - \frac{4y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{\pi}{9} \left[36(3-0) - \frac{4(3-0)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{9}(108-36) \;= 8\pi$$ ลบ.หน่วย



ข) หาปริมาตรหมุนรอบแกน x

โดยรัศมีเท่ากับ y ความหนาเท่ากับ dx ขอบเขตของการอินทิเกรตจาก $x = 0$ ถึง $y = 2$

จากสูตร $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx$$

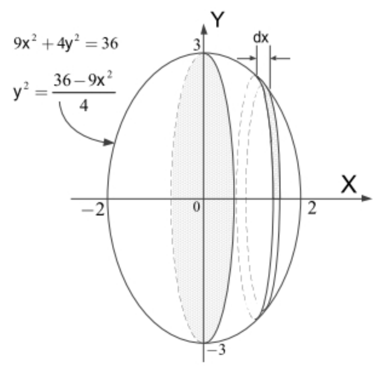
$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{36-9x^2}{4}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^2 (36-9x^2) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[36x - \frac{9x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\left(36(2-0) - 3(2-0)^3\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}(72-24) \;= 12\pi$$ ลบ.หน่วย

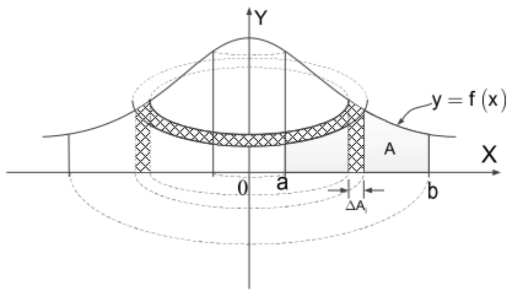


กรณีที่ 2 วิธีหาปริมาตรของรูปทรงตันด้วยวิธีเปลือกทรงกระบอก

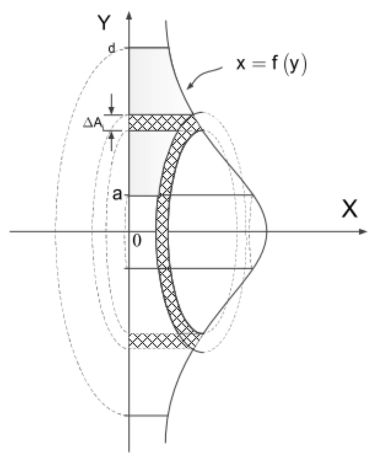
ในการหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนนี้ บางครั้งใช้วิธีเปลือกทรงกระบอกสะดวกกว่าการใช้วิธีจานในหัวข้อที่ผ่านมา ในกรณีที่ทรงตันมีความกลวงเมื่อหมุนรอบแกนใด ๆ ดังภาพที่ 5.6 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ ดังแสดงในภาพที่ 5.6 สามารถหาปริมาตรของทรงตัน V ที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ A รอบแกน y ด้วยสมการที่ (5.11)

$$V = 2\pi \int_a^b x.f(x)dx \tag{5.11}$$



ภาพที่ 5.6 ลักษณะการหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน y



ภาพที่ 5.7 ลักษณะการหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน x

ในทำนองเดียวกัน ดังภาพที่ 5.7 สามารถหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน x โดยกำหนด $x = f(y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ ให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = f(y)$ กับแกน y เส้นตรง $y = c$ และเส้นตรง $y = d$ สามารถหาปริมาตรจากสมการที่ (5.12) เมื่อแกนหมุนเป็นแกน x

$$V = 2\pi \int_c^d y.f(y)dy \tag{5.12}$$

ตัวอย่างที่ 5.74 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = x^{2/3}$ ดังภาพด้านล่าง โดยใช้วิธีเปลือกทรงกระบอก ก. หมุนรอบแกน x ข. หมุนรอบเส้นตรง $x = 2$

วิธีทำ

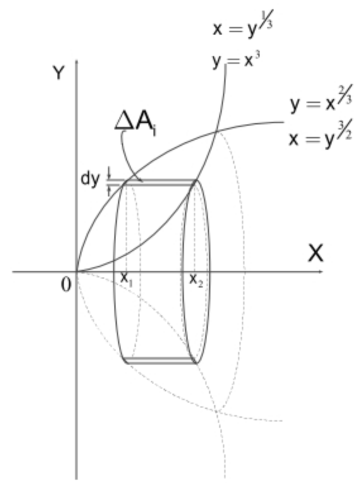
ก. หมุนรอบแกน x

ในบริเวณพื้นที่ปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = x^{2/3}$

ให้ตัดเป็นพื้นที่ A_i ที่ขนานกับแกน x ที่มีรัศมีเท่ากับ y

ความสูงมีค่าเท่ากับ $x_2 - x_1$ ลิมิตจาก $y = 0$ และ $y = 1$

แทนค่าตามสูตร $V = 2\pi \int_c^d y.f(y)dy$ จะได้



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 y.\left(y^{1/3} - y^{3/2}\right)dy \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(y^{4/3} - y^{5/2}\right)dy \\
&= 2\pi \left[\int_0^1 y^{4/3}dy - \int_0^1 y^{5/2}dy\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{y^{7/3}}{7/3} - \frac{y^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{7}(1-0)^{7/3} - \frac{2}{7}(1-0)^{7/2}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\right] \\
&= \frac{2\pi}{7} \text{ ลบ. หน่วย}
\end{aligned}
$$

ข. หมุนรอบแส้นตรง $x = 1$

ในบริเวณพื้นที่ปิดล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = x^{2/3}$

ให้ตัดเป็นพื้นที่ A_i ที่ขนานกับแกนหมุน $x = 1$ ที่มีรัศมีเท่ากับ $x = 1$

ความสูงมีค่าเท่ากับ $y_2 - y_1$ ลิมิตจาก $x = 0$ และ $x = 1$

แทนค่าตามสูตร $V = 2\pi \int_a^b x.f(x)dy$ จะได้

$$V = 2\pi \int_0^1 (1)\left(x^{2/3} - x^3\right)dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^{2/3} - x^3\right)dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

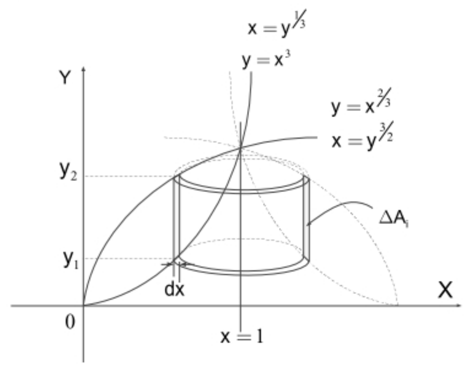
$$= 2\pi \left[\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{5}(1-0)^{5/3} - \frac{(1-0)^4}{4}\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{12-5}{20}\right]$$

$$= \frac{7\pi}{10} \text{ ลบ. หน่วย}$$



5.6 การอินทิเกรตรูปแบบยังไม่กำหนดและการประยุกต์

สมการคณิตศาสตร์ไม่ได้มีรูปแบบการเขียนที่ตายตัวทั้งหมด และมักจะมีการเขียนสมการที่มีอนุพันธ์ประกอบอยู่ในสมการด้วย เช่น $\frac{dy}{dx} = \left(2x^3 - 4x^2 + 2x\right)$ ดังนั้นหากจะหาค่าของสมการนี้ต้องใช้อินเดฟินิทอินทิกรัล (indefinite integral) เข้าช่วย จะได้ สมการแบบนี้จะเป็นรูปแบบที่ยังไม่กำหนด หรือเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ จาก $\frac{dy}{dx} = \left(2x^3 - 4x^2 + 2x\right)$ หาค่า y ได้ดังนี้

$$dy = \left(2x^3 - 4x^2 + 2x\right)dx$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\int dy = \int (2x^3 - 4x^2 + 2x)dx$$

ดังนั้น

$$y = \int (2x^3 - 4x^2 + 2x)dx$$

$$y = \int 2x^3dx - \int 4x^2dx + \int 2xdx$$

$$y = \frac{2x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + x^2 + c$$

ซึ่งจะสามารถหาค่า c ได้จากการกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปร x และ y อาทิเช่น สมมติให้ $x = 1$ และ $y = 2$ สามารถหาค่า c ได้ดังนี้

$$2 = \frac{1^4}{2} - \frac{4(1)^3}{3} + 1^2 + c$$

$$c = 2 - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1$$

$$c = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \quad = \frac{11}{6}$$

จะได้ $y = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + x^2 + \frac{11}{6}$

ตัวอย่างที่ 5.74 จงหาสมการเส้นโค้ง เมื่อกำหนดให้ $dy = 4(x-7)^3dx$ และ $y = 10$ เมื่อ $x = 8$

วิธีทำ

จาก $dy = 4(x-7)^3dx$

หาค่า y โดยอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\int dy = \int 4(x-7)^3 dx$$

$$y = 4\int (x-7)^3 dx$$

$$y = 4\frac{(x-7)^4}{4} + c$$

แทนค่า $y = 10$ เมื่อ $x = 8$ จะได้

$$10 = (8-7)^4 + c$$

$$c = 10 - 1 \quad = 9$$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง เท่ากับ $y = (x-7)^4 + 9$

ตัวอย่างที่ 5.75 จงหาสมการเส้นโค้ง เมื่อกำหนดให้ $y''=(6x-8)$ และผ่านจุด $(1,0)$ และมีความชัน ณ จุดนั้นเท่ากับ $m=4$

วิธีทำ

จากโจทย์ $y''=(6x-8)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่สองหา y' ได้ด้วยการอินทิเกรตหนึ่งครั้ง จะได้

$$\frac{d}{dx}(y')=(6x-8)$$

$$d(y')=(6x-8)dx$$

$$\int d(y')=\int(6x-8)dx$$

$$y'=3x^2-8x+c$$

สมการเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(1,0)$ และมีความชัน $m=4$ ดังนั้น จะได้

$$4=3(1)^2-8(1)+c_1$$

$$c_1=9$$

แทนค่า $c_1=9$ จะได้ $y'=3x^2-8x+9$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง จะได้

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-8x+9$$

$$dy=(3x^2-8x+9)dx$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\int dy=\int(3x^2-8x+9)dx$$

$$y=x^3-4x^2+9x+c_2$$

สมการเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(1,0)$ แทนค่า $x=1$ และ $y=0$ จะได้

$$0=(1)^3-4(1)^2+9(1)+c_2$$

$$c_2=-(1)^3+4(1)^2-9(1)$$

$$c_2=-1+4-9$$

$$c_2=-6$$

จะได้สมการเส้นโค้งเป็น $y=x^3-4x^2+9x-6$