



Nakhon Pathom Rajabhat University

MATHEMATICS ENGINEERING I

MR.ADISORN KAEWPUKDEE

Department of Telecommunications Engineering

Faculty of Science and Technology

Nakhon Pathom Rajabhat University

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

Vector Line Plane in Three Dimensional



พีชคณิตเวกเตอร์ เส้นตรงและระนาบในปริภูมิสามมิติ

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. พิกัดสองมิติ
2. พีชคณิตเวกเตอร์ของปริภูมิสองมิติ
3. พิกัดสามมิติ
4. พีชคณิตเวกเตอร์ของปริภูมิสามมิติ
5. เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

Vector Line Plane in Three Dimensional



พีชคณิตเวกเตอร์ เส้นตรงและระนาบในปริภูมิสามมิติ

ปริมาณโดยทั่วไปแบ่งออกเป็นสองประเภท คือ ปริมาณสเกลาร์เป็นปริมาณเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนจริงหรือส่วนจริง ได้แก่ ประจุ กระแส พลังงาน พื้นที่ ปริมาตร น้ำหนัก ความหนาแน่น ความดัน และความเร่ง เป็นต้น ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ได้แก่ ความเข้มสนามไฟฟ้าความเข้มสนามแม่เหล็ก เป็นต้น พบว่า ปริมาณเวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาด และทิศทางในอวกาศ เพราะฉะนั้น คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เช่น คลื่นไมโครเวฟ จึงเกี่ยวข้องกับเวกเตอร์เสมอ จึงทำให้การวิเคราะห์เวกเตอร์ เป็นสิ่งจำเป็น และมีความสำคัญอย่างยิ่งที่จะต้องศึกษา ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงเวกเตอร์ในพีคัดสองมิติ และเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ รวมถึงพีชคณิตของเวกเตอร์ทั้งสองพีคัดด้วย เพื่อที่จะได้นำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนในขั้นสูงขึ้น

6.1 ปริภูมิสองมิติ

ระบบพีคัดสองมิติ หรือ ระบบพีคัดฉาก (rectangular coordinate system) กำหนดให้ P เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ในปริภูมิสองมิติ หรือพีคัดฉากนี้ สามารถเขียนเป็นพีคัดได้ $P(x, y)$ ดังภาพที่ 6.1 กำหนดจุด $P(3, 4)$ ลงในปริภูมิสองมิติ แล้วสามารถเขียนเป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิด ดังนี้ $\vec{OP}$ เป็นการเขียนเวกเตอร์จากจุดกำเนิด $O(0, 0)$ ไปยังจุด $P(3, 4)$ เขียนเป็นคู่ลำดับได้ $\vec{OP} = (3, 4)$ และ $|\vec{OP}|$ เป็นการหาขนาดของเวกเตอร์ หรือเวกเตอร์ผลลัพธ์ มีค่าเท่ากับ $|\vec{OP}| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$ ซึ่งจะคล้ายกับการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่เคยเรียนมาแล้ว

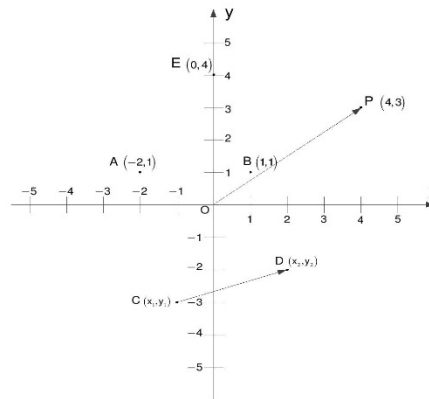
ถ้ากำหนดให้ มีจุดสองจุดบนระนาบปริภูมิสองมิติ เป็นจุด $C(x_1, y_1)$ และจุด $D(x_2, y_2)$ ดังภาพที่ 6.1 สามารถเขียนเป็นเวกเตอร์ และหาขนาดเวกเตอร์ได้ดังสมการด้านล่างนี้

$$\vec{CD} = ((x_2 - x_1), (y_2 - y_1)) = (A_x, A_y) \quad (6.1)$$

ให้เป็นเวกเตอร์ $\vec{CD} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y$

$$|\vec{CD}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (6.2)$$

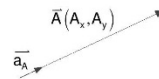
Vector Line Plane in Three Dimensional



ภาพที่ 6.1 ระบบพิกัดสองมิติ

เวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติ (Vector)

บทนิยามของเวกเตอร์ในระบบพิกัดสองมิติ กำหนดให้ $\vec{A}(A_x, A_y)$ กล่าวได้ว่า A_x เป็นส่วนประกอบในแนวแกน x และ A_y เป็นส่วนประกอบในแนวแกน y เวกเตอร์เป็นปริมาณที่ประกอบด้วยขนาด (magnitude) และทิศทาง (direction) ซึ่ง $\vec{a}_x$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางในแนวแกน x และ $\vec{a}_y$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางในแนวแกน y เขียนได้อีกแบบคือ $\vec{A}(A_x, A_y) = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y$



ภาพที่ 6.2 เวกเตอร์ $\vec{A}(A_x, A_y)$ ในพิกัดสองมิติ

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย และทำหน้าที่เป็นตัวแทนทิศทางของเวกเตอร์ กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}(A_x, A_y)$ ดังภาพที่ 5.2 มี $\vec{a}_x$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย คำนวณหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสามารถทำได้ดังนี้

$$\vec{a}_x = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad (\text{มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยเสมอ } |\vec{a}_x| = 1) \quad (6.3)$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ตัวอย่างที่ 6.1 จากจุด $A(2,1)$ และไปยังจุด $B(3,-2)$ จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และหา $|\overrightarrow{AB}|$

วิธีทำ $\overrightarrow{AB}[(3-2),(-2-1)]$ จะได้ $\overrightarrow{AB}(1,-3)$ เขียนเป็นเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}_x - 3\vec{a}_y$$

หาขนาดของเวกเตอร์ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10} \text{ หน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{a}_A$ มีทิศทางจากจุดกำเนิดและตรงไปยังจุด $(2,-2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y$ ดังนั้น ขนาดของ $\vec{A}$ หาได้โดย

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\vec{a}_x - 2\vec{a}_y}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{a}_x - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{a}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}_y$$

สามารถตรวจสอบได้จากความจริงที่ว่า ขนาดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใดๆ จะมีค่าเท่ากับหนึ่งเสมอ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} |\vec{a}_A| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

6.2 พิกัดเวกเตอร์ของปริภูมิสองมิติ

กำหนดให้ $\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y$ และ $\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิสองมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$1. \vec{A} + \vec{B} = (A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y) + (B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y) = (A_x + B_x)\vec{a}_x + (A_y + B_y)\vec{a}_y$$

$$2. \vec{A} - \vec{B} = (A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y) - (B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y) = (A_x - B_x)\vec{a}_x + (A_y - B_y)\vec{a}_y$$

$$3. (-1)\vec{A} = -(A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y) = -A_x\vec{a}_x - A_y\vec{a}_y$$

$$4. \vec{A} + (-\vec{A}) = 0$$

$$5. k\vec{A} = k(A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y) = kA_x\vec{a}_x + kA_y\vec{a}_y$$

$$6. k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ตัวอย่างที่ 6.3 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y$ และ $\vec{B} = \vec{a}_x - 5\vec{a}_y$ จงหาเวกเตอร์ $\vec{A} + \vec{B}$ และ $\vec{A} - \vec{B}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y) + (\vec{a}_x - 5\vec{a}_y) \\ &= (2+1)\vec{a}_x + (3-5)\vec{a}_y = 3\vec{a}_x - 2\vec{a}_y \\ \vec{A} - \vec{B} &= (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y) - (\vec{a}_x - 5\vec{a}_y) \\ &= (2-1)\vec{a}_x + (3+5)\vec{a}_y = \vec{a}_x + 8\vec{a}_y\end{aligned}$$

การคูณเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์ k จะทำให้ขนาดของเวกเตอร์เปลี่ยนไป k เท่า แต่ทิศทางยังคงเดิม นั่นคือ

$$k\vec{A} = kA\vec{a}_A \quad (6.4)$$

สำหรับการวิเคราะห์เวกเตอร์นั้น ผลคูณของเวกเตอร์จะมีสองแบบ คือ

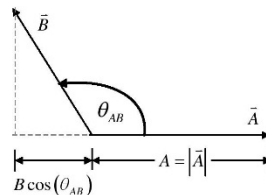
- 1) ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) หรือผลคูณจุด (dot product)
- 2) ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ สามารถเขียนแทนได้ด้วย $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (เครื่องหมาย . อ่านว่า ด็อท) ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์นี้จะเป็นค่าสเกลาร์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta_{AB}) = AB \cos(\theta_{AB}) \quad (6.5)$$

โดยที่ $A = |\vec{A}|$, $B = |\vec{B}|$ และ θ_{AB} คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ($0 \leq \theta_{AB} < 180^\circ$) ดังภาพที่ 6.3



ภาพที่ 6.3 การคูณเชิงสเกลาร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

Vector Line Plane in Three Dimensional



คุณสมบัติที่สำคัญของการคูณเชิงสเกลาร์

1. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ เป็นคุณสมบัติการสลับที่
2. $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$
3. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
4. $(a\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (a\vec{B}) = a(\vec{A} \cdot \vec{B})$ เมื่อ a เป็นสเกลาร์
5. $|\vec{A} \pm \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 \pm 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta_{AB}) + |\vec{B}|^2$
6. ถ้า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$ แล้ว $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
7. ถ้า $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ แล้ว $\vec{A} \cdot \vec{B} = \pm |\vec{A}||\vec{B}|$

ตัวอย่างที่ 6.4 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2$ และ $\vec{B} = \vec{x}_1 - 5\vec{x}_2$ จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$
วิธีทำ

$$\text{เนื่องจาก } \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\text{ดังนั้น } \vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(1) + (3)(-5) = 2 - 15 = -13$$

$$\text{หาขนาดของ } \vec{A} \text{ นั่นคือ } |\vec{A}| = |2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2|$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{หาขนาดของ } \vec{B} \text{ นั่นคือ } |\vec{B}| = |\vec{x}_1 - 5\vec{x}_2|$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\text{จาก } \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta_{AB})$$

$$\text{ดังนั้น } \cos(\theta_{AB}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-13}{\sqrt{13}(\sqrt{26})} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$$

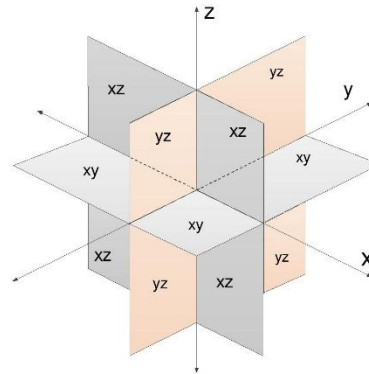
6.3 ปริภูมิสามมิติ

ระนาบในปริภูมิสามมิติเป็นลักษณะเกิดจากแกนสามแกนตัดผ่านในลักษณะตั้งฉากซึ่งกันและกัน ประกอบด้วย แกน x แกน y และแกน z จุดตัดกันของทั้งสามแกนเรียกว่าจุดกำเนิด (origin) แกน x แกน y และแกน z เรียกว่า แกนพิกัด จากรบบพิกัดสองมิติที่เคยศึกษามาก่อนแล้วจะมีแค่แกน x และแกน y ระนาบที่เกิดขึ้นจากแกน x และแกน y ในระบบพิกัดสองมิติจึงเป็น ระนาบ xy จะแตกต่างกับระนาบในระบบพิกัดสามมิติที่เกิดจากแกนทั้งสามที่ตัดผ่าน สามารถกำหนดระนาบได้เป็น

Vector Line Plane in Three Dimensional



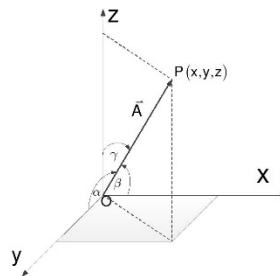
สามระนาบได้แก่ ระนาบ xy ระนาบ xz และระนาบ yz ดังแสดงในภาพที่ 6.4 เป็นระนาบที่เกิดขึ้นในระบบพิกัดฉากสามมิติ ซึ่งระนาบเหล่านี้เป็นระนาบพิกัด หรือระนาบอ้างอิง



ภาพที่ 6.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

จากภาพที่ 6.5 กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดสามมิติ ดังนั้นเวกเตอร์ $\vec{A}$ จะประกอบด้วยส่วนประกอบในแนวแกนทั้งสามแกนดังนี้ $\vec{A}(x,y,z)$ ตามภาพกำหนดให้เป็นจุด P สามารถหาขนาดความยาวของเวกเตอร์ $\vec{OP}$ ได้จากสมการที่ (6.6)

$$|\vec{OP}| = |\vec{A}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \quad (6.6)$$



ภาพที่ 6.5 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

Vector Line Plane in Three Dimensional



และจากภาพที่ 6.5 เวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม β α และ γ กับแกน x แกน y และแกน z ตามลำดับ โดยมุมทั้งสามอยู่ระหว่าง 0 ถึง π และเรียกมุมทั้งสามนี้ว่า มุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเรียก $\cos(\beta)$ $\cos(\alpha)$ และ $\cos(\gamma)$ ว่า โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{A}$ หาค่าได้จาก

$$\cos(\beta) = \frac{x}{|\vec{A}|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{y}{|\vec{A}|}$$

$$\text{และ } \cos(\gamma) = \frac{z}{|\vec{A}|}$$

ผลรวมค่าโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ยกกำลังสองมีค่าเท่ากับหนึ่ง ตามสมการที่ (6.7) ด้านล่างนี้

$$\cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha) + \cos^2(\gamma) = 1 \quad (6.7)$$

ระบบพิกัดสามมิติที่กล่าวถึงนี้เป็นระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสามมิติ กำหนดให้จุด P เป็นจุดใด ๆ ในปริภูมิสามมิติ มีพิกัดเป็น $P(x, y, z)$ สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 6.5 ปริภูมิสามมิติ หรือ ระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) สามมิติ จุด P ที่อยู่ในปริภูมิสามมิติ สามารถเขียนเป็นพิกัดได้ $P(x, y, z)$ ดังภาพที่ 6.6 กำหนดจุด $P(2, 4, 1)$ ลงในปริภูมิสามมิติ แล้วสามารถเขียนเป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิด ดังนี้ $\vec{OP}$ เป็นการเขียนเวกเตอร์จากจุดกำเนิด $O(0, 0, 0)$ ไปยังจุด $P(2, 4, 1)$ เขียนเป็นคู่ลำดับได้ $\vec{OP} = (2, 4, 1)$ และ $|\vec{OP}|$ เป็นการหาขนาดของเวกเตอร์ หรือเวกเตอร์ผลลัพธ์ มีค่าเท่ากับ $|\vec{OP}| = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{21}$ ซึ่งจะคล้ายกับการหาระยะทางในสองมิติ

ถ้ากำหนดให้มีจุดสองจุดบนระนาบปริภูมิสามมิติ เป็นจุด $C(x_1, y_1, z_1)$ และจุด $D(x_2, y_2, z_2)$ ดังภาพที่ 6.4 สามารถเขียนเป็นเวกเตอร์ และหาขนาดเวกเตอร์ได้ดังสมการด้านล่างนี้

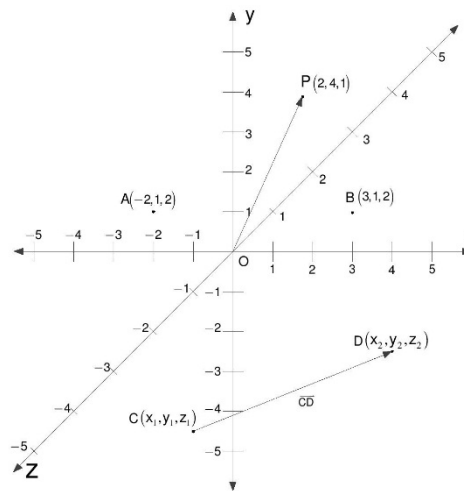
$$\vec{CD} = ((x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)) = (A_x, A_y, A_z)$$

ให้เป็นเวกเตอร์ $\vec{CD} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$

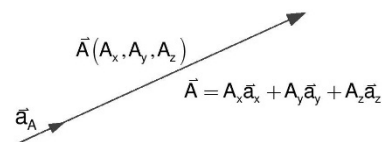
$$|\vec{CD}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (6.8)$$

เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ (Vector) บทนิยามของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ กำหนดให้ $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ กล่าวได้ว่า A_x เป็นส่วนประกอบในแนวแกน x และ A_y เป็นส่วนประกอบในแนวแกน y และ A_z เป็นส่วนประกอบในแนวแกน z เวกเตอร์เป็นปริมาณที่ประกอบด้วยขนาด (magnitude) และทิศทาง (direction) ซึ่ง $\vec{a}_x$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางในแนวแกน x และ $\vec{a}_y$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางในแนวแกน y และ $\vec{a}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางในแนวแกน z เขียนได้อีกแบบคือ $\vec{A}(A_x, A_y, A_z) = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ภาพที่ 6.6 ปริภูมิสามมิติของระบบพิกัดฉาก

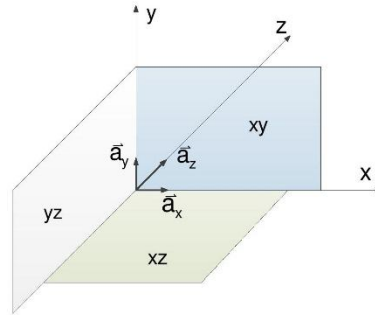


ภาพที่ 6.7 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย และทำหน้าที่เป็นตัวเน้นทิศทางของเวกเตอร์ กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ ดังภาพที่ 6.7 มี $\vec{a}_A$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย คำนวณหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสามารถทำได้ดังนี้

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \quad (\text{มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยเสมอ } |\vec{a}_A| = 1)$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ภาพที่ 6.8 ระนาบและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ

ตัวอย่างที่ 6.5 กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}(2, -2, -1)$ จงหาขนาดและมุมแสดงทิศทางของ $\vec{A}$

วิธีทำ

หาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ จะได้

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

ให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำมุม β และ γ กับแกน x แกน y และแกน z ตามลำดับ

หามุมแสดงทิศทางของ $\vec{A}$ ได้จาก

$$\cos(\beta) = \frac{x}{|\vec{A}|} = \frac{2}{3} \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48.18^\circ$$

$$\cos(\alpha) = \frac{y}{|\vec{A}|} = \frac{-2}{3} \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 132.8^\circ$$

$$\text{และ} \quad \cos(\gamma) = \frac{z}{|\vec{A}|} = \frac{-1}{3} \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) = 109.47^\circ$$

พิสูจน์ $\cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha) + \cos^2(\gamma) = 1$ จะได้

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

$$\frac{9}{9} = 1$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



6.4 พิกัดเวกเตอร์ของปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาด (magnitude) และทิศทาง (direction) ดังนั้น เวกเตอร์ใด ๆ ที่อยู่บนระนาบสามมิติสามารถเขียนได้เป็น $\vec{A}(A_x, A_y, A_z) = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$ หรือ $\vec{A}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ และ $\vec{A}(i, j, k) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ซึ่งมีลักษณะการใช้สัญลักษณ์ที่ต่างกัน

กำหนดให้ $\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$ และ $\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $\vec{A} + \vec{B} = (A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z) + (B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z)$
 $= (A_x + B_x)\vec{a}_x + (A_y + B_y)\vec{a}_y + (A_z + B_z)\vec{a}_z$
2. $\vec{A} - \vec{B} = (A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z) - (B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z)$
 $= (A_x - B_x)\vec{a}_x + (A_y - B_y)\vec{a}_y + (A_z - B_z)\vec{a}_z$
3. $(-1)\vec{A} = -(A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z) = -A_x\vec{a}_x - A_y\vec{a}_y - A_z\vec{a}_z$
4. $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$
5. $k\vec{A} = k(A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z) = kA_x\vec{a}_x + kA_y\vec{a}_y + kA_z\vec{a}_z$
6. $k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$

ตัวอย่างที่ 6.6 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 3\vec{a}_z$ และ $\vec{B} = 2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 8\vec{a}_z$ จงหา $(2)\vec{A}$, $\left(\frac{1}{2}\right)\vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$

และ $\vec{A} + \vec{B}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{หา } (2)\vec{A} &= (2)(2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 3\vec{a}_z) \\ &= 4\vec{a}_x + 6\vec{a}_y - 6\vec{a}_z \\ \text{หา } \left(\frac{1}{2}\right)\vec{B} &= \left(\frac{1}{2}\right)(2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 8\vec{a}_z) \\ &= \vec{a}_x - 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z \\ \text{หา } \vec{A} - \vec{B} &= (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 3\vec{a}_z) - (2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 8\vec{a}_z) \\ &= 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 3\vec{a}_z - 2\vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 8\vec{a}_z \\ &= (2-2)\vec{a}_x + (3+4)\vec{a}_y + (-3-8)\vec{a}_z \\ &= 0\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 11\vec{a}_z = 7\vec{a}_y - 11\vec{a}_z \\ \text{หา } \vec{A} + \vec{B} &= (2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 3\vec{a}_z) + (2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 8\vec{a}_z) \\ &= 2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - 3\vec{a}_z + 2\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 8\vec{a}_z \\ &= (2+2)\vec{a}_x + (3-4)\vec{a}_y + (-3+8)\vec{a}_z \\ &= 4\vec{a}_x - \vec{a}_y + 5\vec{a}_z\end{aligned}$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หรือ ผลการคูณไขว้ (cross product) จะเขียนแทนได้ด้วย $\vec{A} \times \vec{B}$ (อ่านว่า $\vec{A}$ ครอส $\vec{B}$) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_n |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta_{AB}) \quad (6.9)$$

โดยที่ a_n เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางไปตามเวกเตอร์ของผลลัพธ์ จะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเวกเตอร์ เนื่องจาก สมการทางด้านขวามือมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยปรากฏอยู่

ถ้ากำหนดให้ $\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$ และ $\vec{B} = B_x \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z$ ค่าของ $\vec{A} \times \vec{B}$ สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{a}_x - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{a}_z \\ &= A_y B_z \vec{a}_x - B_y A_z \vec{a}_x + A_z B_x \vec{a}_y - B_z A_x \vec{a}_y + A_x B_y \vec{a}_z - B_x A_y \vec{a}_z \\ \vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - B_y A_z) \vec{a}_x + (A_z B_x - B_z A_x) \vec{a}_y + (A_x B_y - B_x A_y) \vec{a}_z \end{aligned} \quad (6.10)$$

คุณสมบัติที่สำคัญของการคูณเชิงเวกเตอร์

1. $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$ เนื่องจาก $\sin(0^\circ) = 0$
2. $\vec{A} \times \vec{0} = \vec{0}$
3. $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$
4. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$
5. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$
6. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
7. กำหนดให้ θ_{AB} เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยที่ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ จะได้ว่า $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta_{AB})$
8. สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ และ $\vec{a}_z$ จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\begin{aligned} \vec{a}_x \times \vec{a}_y &= \vec{a}_z \\ \vec{a}_y \times \vec{a}_z &= \vec{a}_x \\ \vec{a}_z \times \vec{a}_x &= \vec{a}_y \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ เช่น $\vec{A} \times \vec{B}$ จะสอดคล้องกับกฎมือขวา (right-handed screw rule) ถ้าทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วยหมุนกลับทิศทาง จะได้ว่า

Vector Line Plane in Three Dimensional



$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_x$$

ตัวอย่างที่ 6.7 กำหนดให้ $\vec{A} = -\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ และ $\vec{B} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ พร้อมทั้งหามุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$

วิธีทำ หา $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (2(3) - (-1)(-1))\mathbf{a}_x + ((-1)(1) - (3)(-1))\mathbf{a}_y + ((-1)(-1) - (2)(1))\mathbf{a}_z \\ &= 5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{a}_c$ ในทิศทางเดียวกับ $\vec{C}$ หาได้จาก

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_c &= \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z}{|5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z|} \\ &= \frac{5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{5\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z}{\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}}\mathbf{a}_x + \frac{2}{\sqrt{30}}\mathbf{a}_y - \frac{1}{\sqrt{30}}\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

มุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ หาได้จาก

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

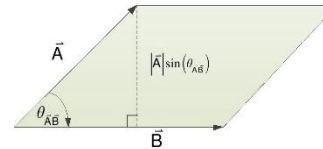
$$\sin(\theta_{AB}) = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{(\sqrt{6})(\sqrt{11})} = \frac{\sqrt{30}}{(\sqrt{6})(\sqrt{11})} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น จะได้ } (\theta_{AB}) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right) = 42.39^\circ$$

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยวิธีการคูณเวกเตอร์ จากภาพที่ 6.7 เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานกำหนดเป็นเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือขนาดของผลคูณเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

$$\text{พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน } |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta_{AB}) \quad (6.11)$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ภาพที่ 6.9 สี่เหลี่ยมด้านขนานแสดงการหาพื้นที่ด้วยการคูณเวกเตอร์

สามารถพิจารณาการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้วยวิธีการคูณเวกเตอร์จากพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ทารด้วย 2 จะได้พื้นที่รูปสามเหลี่ยมดังสมการที่ (6.12)

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ } \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta_{AB}) \quad (6.12)$$

ตัวอย่างที่ 6.8 จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานของ ABCD โดยกำหนดให้ $\vec{AB} = \vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$ และ

$$\vec{AD} = 3\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$$

วิธีทำ

จากสูตรพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta_{AB})$

$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานของ ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= ((4)(1))\vec{a}_x + ((3)(3))\vec{a}_y + ((1)(-2))\vec{a}_z - ((3)(4))\vec{a}_x - ((-2)(3))\vec{a}_y - ((1)(1))\vec{a}_z$$

$$= (4+6)\vec{a}_x + (9-1)\vec{a}_y + (-2-12)\vec{a}_z$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = 10\vec{a}_x + 8\vec{a}_y - 14\vec{a}_z$$

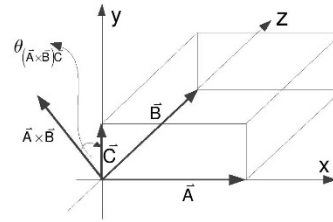
ดังนั้นขนาดของ $\vec{AB} \times \vec{AD}$ เท่ากับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{10^2 + 8^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{100 + 64 + 196}$$

$$= \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \quad \text{ตารางหน่วย}$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



ภาพที่ 6.10 สี่เหลี่ยมด้านขนานแสดงการหาปริมาตรด้วยการคูณเวกเตอร์

การหาปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมทรงตันด้วยวิธีการคูณเวกเตอร์ จากภาพที่ 6.10 สี่เหลี่ยมแต่ละด้านกำหนดเป็นเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมคือพื้นที่ฐานคูณสูง จากภาพที่ 6.10 พื้นฐานคือผลคูณเวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B}$ แล้วนำไปคูณแบบสเกลาร์กับเวกเตอร์ $\vec{C}$ จะได้ดังสมการที่ (6.13)

$$\text{ปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมทรงตัน } |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = |(\vec{A} \times \vec{B})| |\vec{C}| \sin(\theta_{(\vec{A} \times \vec{B})\vec{C}}) \quad (6.13)$$

ตัวอย่างที่ 6.9 จงหาปริมาตรทรงตันของสี่เหลี่ยมด้านขนานของ ABCD โดยกำหนดให้ ด้านกว้างเป็นเวกเตอร์ $\vec{A} = \vec{a}_x + \vec{a}_y - 2\vec{a}_z$ ด้านยาวเป็นเวกเตอร์ $\vec{B} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$ และด้านสูงเป็นเวกเตอร์ $\vec{C} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= ((1)(2))\vec{a}_x + ((-2)(1))\vec{a}_y + ((1)(1))\vec{a}_z - ((1)(2))\vec{a}_x - ((2)(1))\vec{a}_y \\ &= (2+4)\vec{a}_x + (-2-2)\vec{a}_y + (2-1)\vec{a}_z \\ &= 6\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + \vec{a}_z \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} &= (6\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + \vec{a}_z) \cdot (\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z) \\ &= 6\vec{a}_x \cdot \vec{a}_x - 8\vec{a}_y \cdot \vec{a}_y + \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของสี่เหลี่ยม คือ } |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| &= \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (1)^2} = \sqrt{36 + 64 + 1} \\ &= \sqrt{101} = 10.049 \text{ ลูกบาศก์หน่วย} \end{aligned}$$

Vector Line Plane in Three Dimensional



6.5 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

จากภาพที่ 6.11 กำหนดให้เส้นตรง L เป็นเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ มีจุด P_0 เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง L มีเวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์บอกทิศทางของเส้นตรง L สมการของเส้นตรง L แสดงเป็นสมการเวกเตอร์ หรือเรียกว่าสมการอิงตัวแปรเสริม

สมการเวกเตอร์ เป็นตามสมการที่ (6.14) เมื่อ $P(x,y,z)$ และ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ เป็นพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ $\vec{A}(a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางในแนวเดียวกับเส้นตรง

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{A} \quad (6.14)$$

เขียนสมการเวกเตอร์ในรูปพิกัดสามมิติ $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$

หรือสามารถเขียนสมการแยกในแต่ละส่วนประกอบตามแนวแกนทั้งสามแกนได้ดังนี้

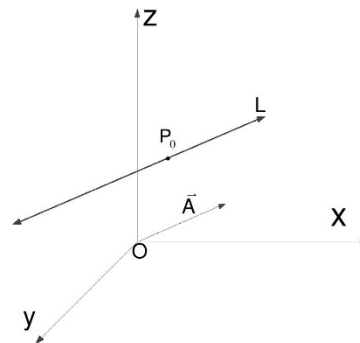
$$x = x_0 + at \quad (6.15)$$

$$y = y_0 + bt \quad (6.16)$$

$$z = z_0 + ct \quad (6.17)$$

เรียกสมการที่ (6.15) (6.16) และ (6.17) ทั้งสามสมการนี้ว่าเป็นสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ในปริภูมิสามมิติ และจากสมการที่ (6.15) (6.16) และ (6.17) เขียนเป็นสมการสมมาตรของเส้นตรง L ได้ดังสมการที่ (6.18)

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad (6.18)$$



ภาพที่ 6.11 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

Vector Line Plane in Three Dimensional



ตัวอย่างที่ 6.10 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตรของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2, -1, -3)$ และ $P_2(1, 2, 3)$

วิธีทำ

กำหนดให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2, -1, -3)$ และ $P_2(1, 2, 3)$ เนื่องจากจุด P_1 และ P_2 เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงนี้ ดังนั้นสามารถหาเวกเตอร์บอกทิศทางจาก P_1 ไปยัง P_2 ดังนี้

$$\vec{P_1P_2} = (P_2 - P_1) = (1, 2, 3) - (2, -1, -3) = (1-2, 2-(-1), 3-(-3))$$

$$\vec{P_1P_2} = (-1, 3, 6) \quad \text{เป็นเวกเตอร์บอกทิศทางของเส้นตรงจากจุด } P_1 \text{ ไปยัง } P_2$$

จากสมการเวกเตอร์ $\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{A}$ ให้จุด $\vec{P_0} = \vec{P_1}$ และ $\vec{A} = \vec{P_1P_2}$ เวกเตอร์บอกทิศทาง จะได้

$$\vec{P} = (2, -1, -3) + t(-1, 3, 6) \quad \text{เมื่อ } t \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

สมการอิงตัวแปรเสริม จะได้

$$x = x_0 + at = 2 - t$$

$$y = y_0 + bt = -1 + 3t$$

$$z = z_0 + ct = -3 + 6t$$

สมการสมมาตรของเส้นตรงนี้ จะได้

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{6}$$

6.6 บทสรุป

ในบทนี้นักศึกษาได้เรียนรู้เกี่ยวกับหัวข้อพีชคณิตของเวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติและสามมิติ การหาขนาดของเวกเตอร์ การหาทิศทางของเวกเตอร์ หรือจะเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใช้บอกทิศทาง คุณสมบัติการคูณเวกเตอร์แบบเชิงสเกลาร์ การคูณแบบเชิงเวกเตอร์ในปริภูมิสองมิติและสามมิติ ตามลำดับ นักศึกษาได้ทราบถึงระบบพิกัดฉากทั้งในปริภูมิสองมิติและสามมิติ ได้ทราบถึงสมการเส้นตรงในปริภูมิสามมิติซึ่งจะเกี่ยวข้องกับสมการอิงตัวแปรเสริม หัวข้อทั้งหมดในบทนี้เป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ในขั้นสูงต่อไป ลักษณะสมการเส้นตรงในปริภูมิสามมิติที่ได้กล่าวมาข้างต้นเป็นพื้นฐานที่จะได้นำไปใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์วิศวกรรม 2 หรือแคลคูลัส 2 ต่อไปนี้หัวข้อจุดกับเส้นตรง การตัดกันของเส้นตรง มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น การขนานกันของเส้นตรง การไขว้ทางระนาบของเส้นตรง ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น สมการของระนาบ จุดกับระนาบ ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงกับระนาบ การขนานกันของระนาบ การตัดกันของระนาบ จนกระทั่งการหาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ โดยทั้งหมดที่กล่าวมานี้เป็นปริภูมิสามมิติ

Vector Line Plane in Three Dimensional



6.7 คำถามท้ายบท

1. จงเขียนปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่ $Q(2,1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P(-1,-4)$ ในรูปของ $\mathbf{a}_x$ กับ $\mathbf{a}_y$
2. กำหนดให้ $A(1,0)$, $B(5,0)$, และ $C(3,4)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศไปในทิศทางเดียวกับส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางจากจุด A ไปยังจุดกึ่งกลางของเส้นตรง BC
3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $Q(1,3)$ และขนานกับเวกเตอร์ $3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y$ แล้ว สมการเส้นตรง L เป็น $4x + 3y - 13 = 0$
4. กำหนดให้ $\mathbf{u} = a_1\mathbf{a}_x + a_2\mathbf{a}_y$ และ $\mathbf{v} = b_1\mathbf{a}_x + b_2\mathbf{a}_y$ จงหามุมระหว่าง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$
5. จงหาขนาดและมุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{A} = -2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$
6. กำหนดให้จุด $Q(1,2,3)$ และ $P(-1,-2,-3)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{QP}$ หาขนาดของเวกเตอร์ $|\overrightarrow{QP}|$ หาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{QP}$ และจำนวนแสดงทิศทางของ $\overrightarrow{QP}$
7. กำหนดให้จุด $A(2,-1,-3)$ และ $B(-2,2,3)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$
8. กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{A}(2,-4,2)$ และเวกเตอร์ $\mathbf{B}(-1,-2,1)$ จงหา
 - 8.1 $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$
 - 8.2 $3\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$
 - 8.3 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
 - 8.4 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
 - 8.5 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
 - 8.5 หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$
9. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(2,1,-1)$ $B(3,0,1)$ และ $C(1,3,-2)$
10. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานของ $ABCD$ โดยกำหนดให้ $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ และ $\overrightarrow{AD} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 1\mathbf{a}_z$
11. จงปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมตันที่มี $ABCD$ โดยกำหนดให้ ด้านกว้างเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ ด้านยาวเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ และด้านสูงเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{C} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$
12. กำหนดให้จุดบนปริภูมิสามมิติ $P_1(3,1,4)$ และ $P_2(-2,0,-1)$ จงหาสมการเวกเตอร์เส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และ P_2 สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร