



มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

# รายวิชา แคลคูลัส 1

รหัสวิชา 4091401

Mr.Kritsada Lerkchaiyaphum  
mathit\_02@webmail.npru.ac.th  
<http://pws.npru.ac.th/mathit/>



## เนื้อหาประกอบด้วย

- บทที่ 1 ลิขิตของฟังก์ชัน
- บทที่ 2 ความต่อเนื่อง
- บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
- บทที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย
- บทที่ 5 การประยุกต์อนุพันธ์



# บทที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน





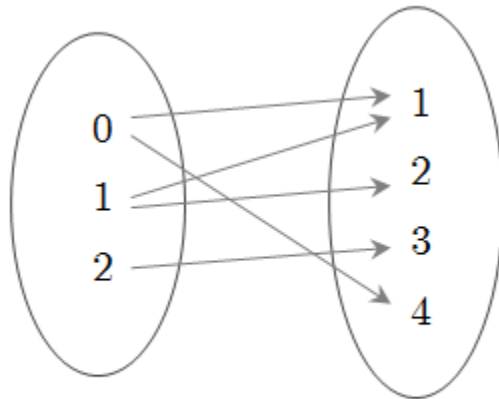
## ฟังก์ชัน

จากความรู้เรื่องความสัมพันธ์ พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

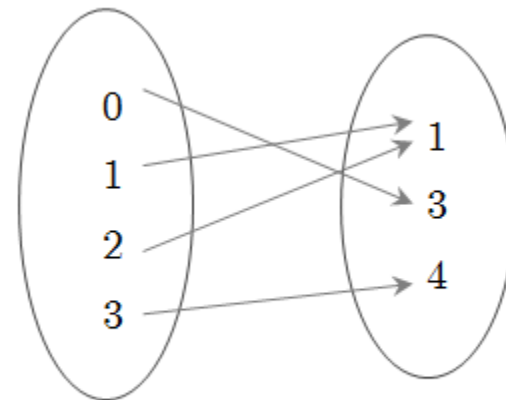
$$r_1 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 1), (0, 4)\}$$

$$r_2 = \{(0, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 4)\}$$

แผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของโดเมนกับสมาชิกของเรนจ์ของความสัมพันธ์  $r_1$  และ  $r_2$  เขียนได้ดังนี้



$r_1$



$r_2$

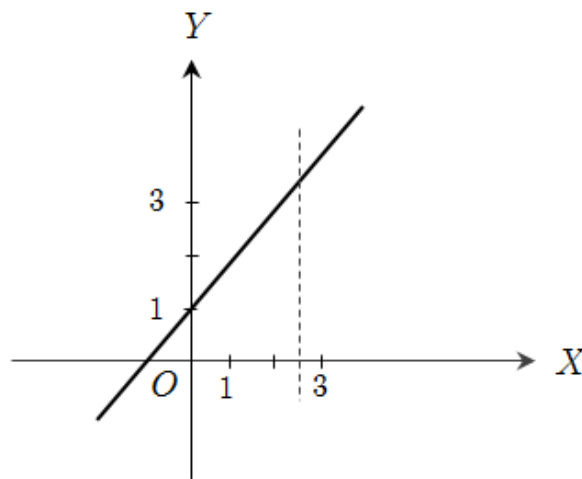


### บทนิยามที่ 1

ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

### ตัวอย่างที่ 1

จงพิจารณาจากกราฟว่า  $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x + 1\}$  เป็นฟังก์ชันหรือไม่



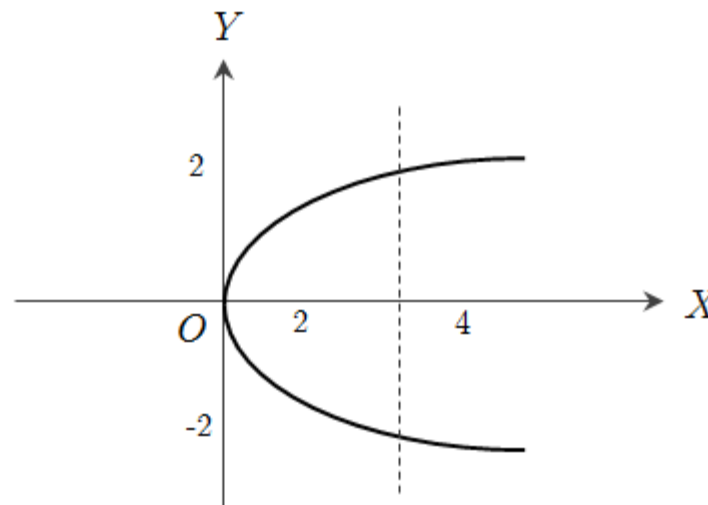
จะเห็นว่าเส้นที่ลากขนานกับแกน  $Y$  ไม่ว่าเส้นใด จะตัดกราฟของ  $r$  เพียงจุดเดียว ดังนั้น  $r$  เป็นฟังก์ชัน

#



## ตัวอย่างที่ 2

จงพิจารณาจากกราฟว่า  $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$  เป็นฟังก์ชันหรือไม่



จะเห็นว่า  $r$  ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีเส้นที่ลากขนานกับแกน  $Y$  ตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุด แสดงว่ามีคู่อันดับอย่างน้อยสองคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน เช่น  $(4, 2)$  และ  $(4, -2)$  #



## 1. ตัวอย่างฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

1. ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป  $f(x) = ax + b$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง เช่น

$$f(x) = 2x + 3, \quad f(x) = x - 1, \quad f(x) = -4x$$

กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน  $Y$

จากฟังก์ชันเชิงเส้น  $f(x) = ax + b$  เมื่อ  $a = 0$  จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูป  $f(x) = b$  ฟังก์ชันนี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่า ฟังก์ชันค่าคงตัว (constant function) กราฟของฟังก์ชันค่าคงตัวจะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน  $X$  และกราฟจะทับแกน  $X$  ที่  $b = 0$  ดังรูปต่อไปนี้

Eliminating  $y$  from (1) and (2), then  
 $(mx + c)^2 = 4ax$  or  $m^2x^2 + 2x(mc - 2a) + c^2 = 0$   
 This equation is quadratic in  $x$ , gives two points  
 parabola in two points may  
 $(3) > , = , < 0$   
 i.e.  $4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 > , = , < 0$



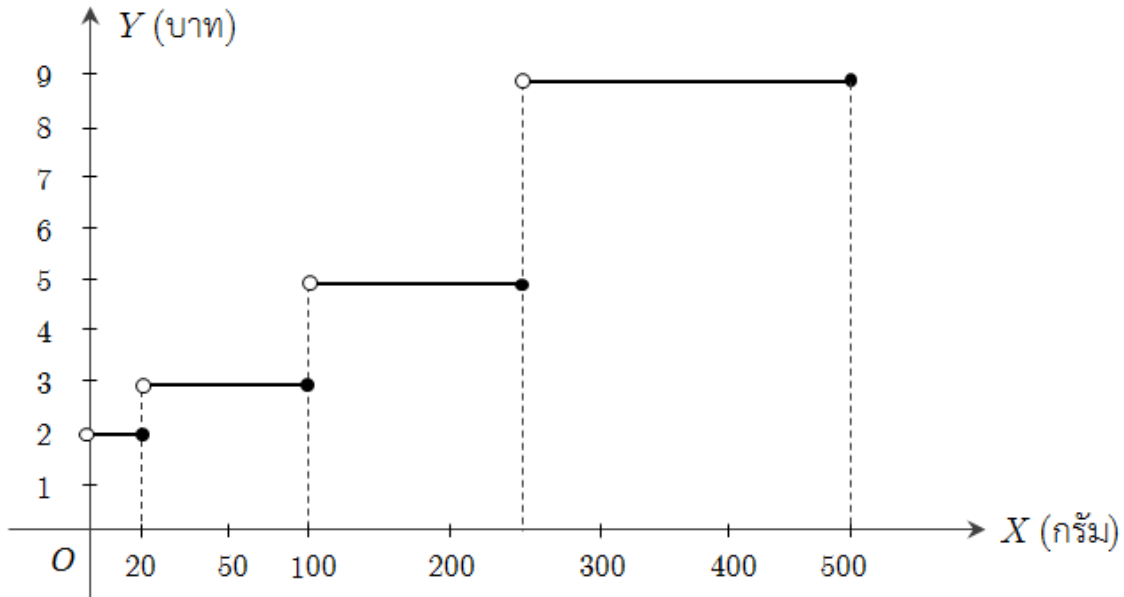
**2. ฟังก์ชันขั้นบันได (step function)** คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ  $R$  และมีค่า

ฟังก์ชันคงตัวเป็นช่วง ๆ มากกว่า 2 ช่วง กราฟของฟังก์ชันนี้มีรูปคล้ายขั้นบันได

**ตัวอย่างที่ 3**

อัตราค่าไปรษณียากรสำหรับส่งจดหมายในประเทศแบบธรรมดา ตั้งแต่วันที่ 15

สิงหาคม พ.ศ. 2558 (ไม่ใช่ทางอากาศ)



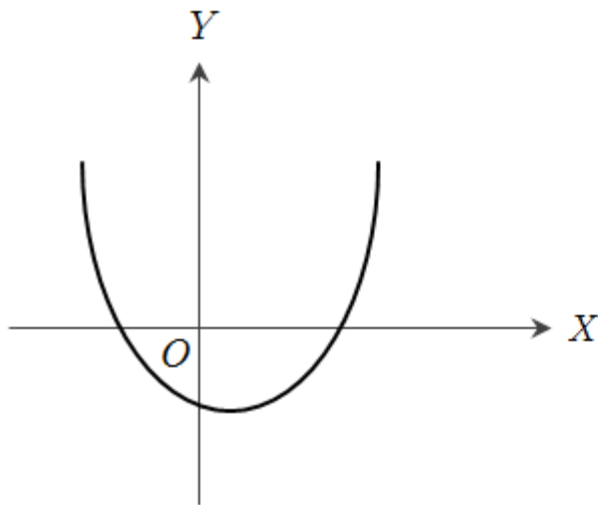


1 + 1 = 3

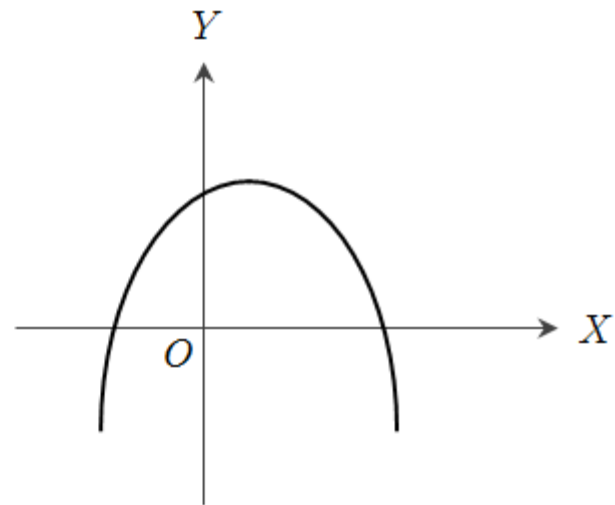


### 3. ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป  $f(x) = ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ  $a \neq 0$  ลักษณะกราฟของฟังก์ชันนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ  $a, b$  และ  $c$  โดยเฉพาะค่า  $a$  ที่เป็นบวกหรือลบจะทำให้ได้กราฟหงายหรือคว่ำดังรูป



$a > 0$



$a < 0$



#### 4. ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

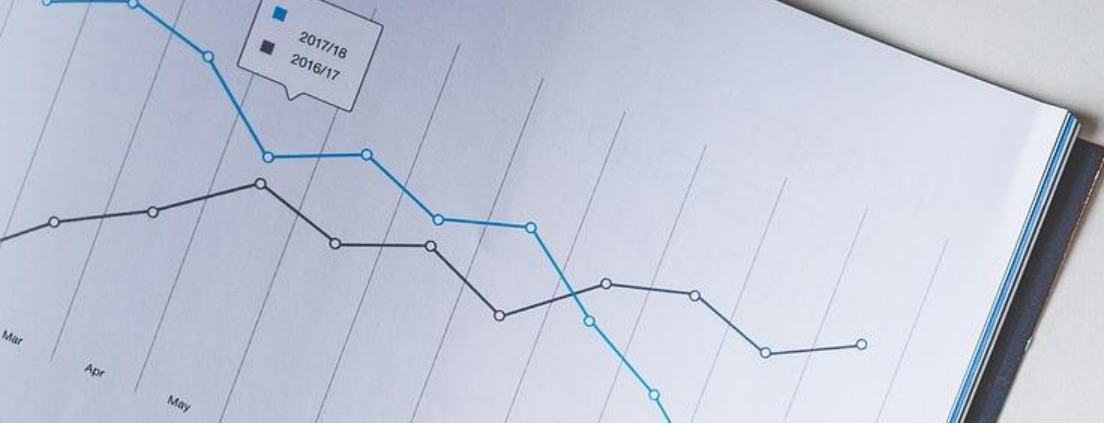
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  โดยที่  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ตัวอย่างของฟังก์ชันพหุนาม เช่น

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^4 + x^2 - x + 4$$

ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันคงตัว และฟังก์ชันกำลังสอง เป็นกรณีเฉพาะของฟังก์ชันพหุนาม



## 5. ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)

ฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันคงตัวจะเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง  $p$  ซึ่ง  $f(x + p) = f(x)$  สำหรับทุกค่าของ  $x$  และ  $x + p$  ที่อยู่ในโดเมนของ  $f$

ตัวอย่างของฟังก์ชันที่เป็นคาบ

