2. แนวความคิดเกี่ยวกับลิมิต

พิจารณาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้

ค่าของฟังก์ชัน $f(x) = 4x - 1$ ขณะ x มีค่าเข้าใกล้ 3 โดยกำหนดค่าของ x ต่าง ๆ ดังตารางต่อไปนี้

$x < 3$		$x > 3$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	9	3.5	13
2.9	10.60	3.1	11.40
2.95	10.80	3.05	11.20
2.99	10.96	3.01	11.04
2.995	10.98	3.005	11.02
2.999	10.996	3.001	11.004

จากตารางพบว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 3 จากทางซ้าย $(x < 3)$ ค่าของฟังก์ชัน f จะเข้าใกล้ 11 จะกล่าวว่า 11 เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ 3 จากทางซ้าย ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 11$

เมื่อ x เข้าใกล้ 3 จากทางขวา $(x > 3)$ ค่าของฟังก์ชัน f จะเข้าใกล้ 11 จะกล่าวว่า 11 เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ 3 จากทางขวา และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 11$

กรณีนี้สามารถกล่าวได้ว่า 11 เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ 3 และจะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 11$

ถ้ากำหนด a และ L เป็นจำนวนจริง โดยที่ $y = f(x)$ ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ใด ๆ แล้วจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเท่ากับ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

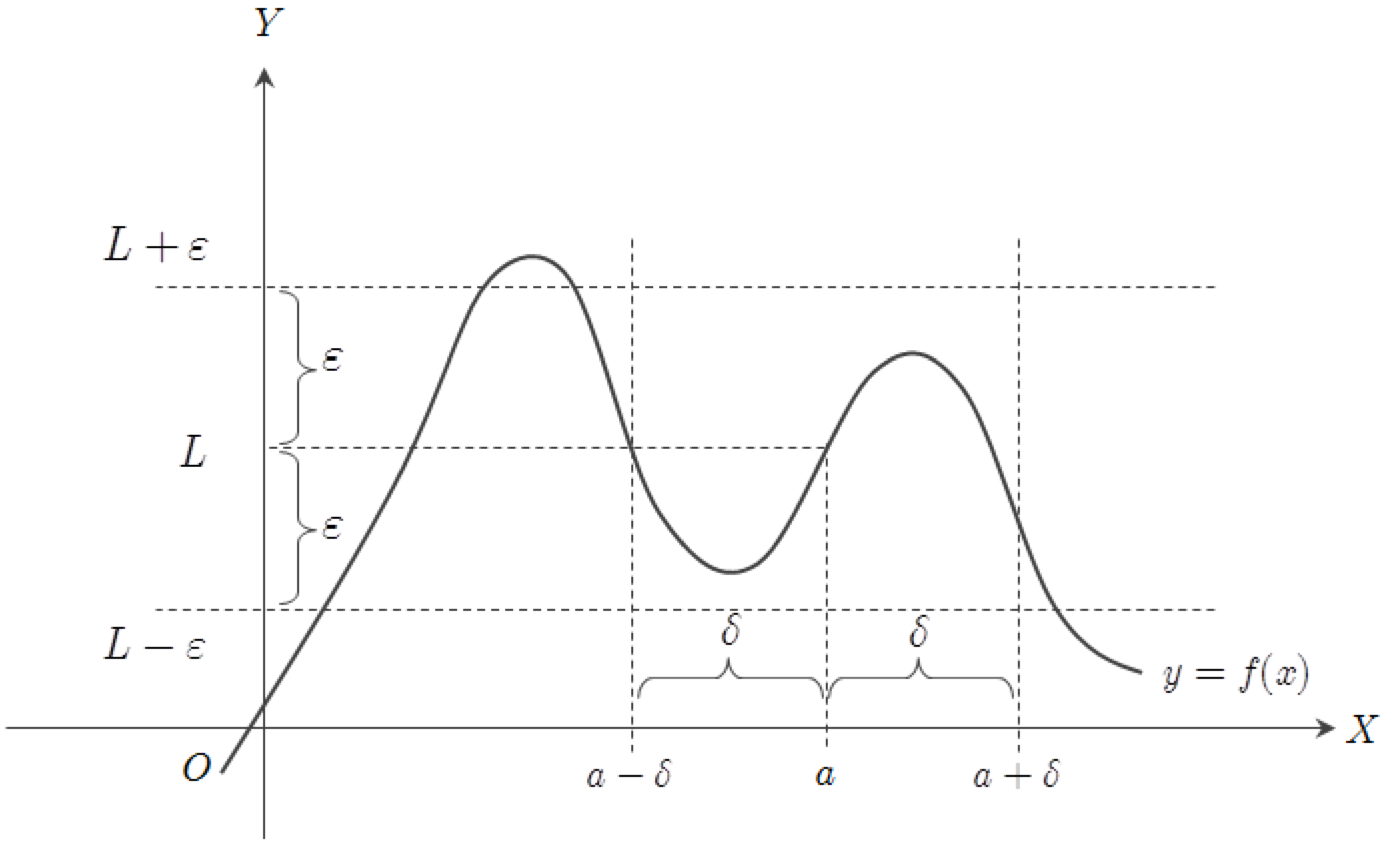
ดังนั้น ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จะหาค่าได้ เมื่อ

1. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าได้

และ 3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

บทนิยามที่ 2 กล่าวว่า L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่สอดคล้องเงื่อนไข ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปต่อไปนี้



ข้อสังเกตจากบทนิยามที่ 2

1. จากเงื่อนไข $0 < |x-a|$ แสดงว่า $x \neq a$ และ $|x-a| < \delta$ ซึ่งมีหมายความว่า $-\delta < x-a < \delta$ หรือ $a-\delta < x < a+\delta$ นั่นคือ $x \in (a-\delta,\ a+\delta)$ และ $x \neq a$

2. จากข้อความ $|f(x)-L| < \varepsilon$ ซึ่งมีความหมายว่า $-\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$ หรือ $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ นั่นคือ $f(x)$ มีค่าอยู่ระหว่าง $L-\varepsilon$ และ $L+\varepsilon$ และ $f(x)$ อาจมีค่าเท่ากับ L ก็ได้

3. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะสามารถหาจำนวนจริงบวก δ ได้เสมอ สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $x \in (a-\delta,\ a+\delta)$ และ $x \neq a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าอยู่ระหว่าง $L-\varepsilon$ และ $L+\varepsilon$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการพิจารณาลิมิตโดยอาศัยบทนิยาม

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $\lim_{x \to 5}(2x-1) = 9$

วิธีคิด ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหาค่า $\delta > 0$

ที่ทำให้ $0 < |x-5| < \delta$ แล้ว $|(2x-1)-9| < \varepsilon$

พิจารณา $|(2x-1)-9|$

จะเห็นว่า $|2x-10| = |2(x-5)| = 2|x-5|$

ซึ่ง $2|x-5| < 2\delta$

นั่นคือ $|(2x-1)-9| < 2\delta$

เนื่องจากต้องการให้ $|(2x-1)-9| < \varepsilon$

นั่นคือ $2\delta = \varepsilon$ ซึ่งจะได้ว่า $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

ตัวอย่างที่ 4 (ต่อ)

วิธีทำ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องหาค่า $\delta > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-5| < \delta$ แล้ว $|(2x-1)-9| < \varepsilon$

ให้ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

เพราะฉะนั้น $|(2x-1)-9| = |2x-10| = 2|x-5| < 2\delta = 2\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

นั่นคือมี $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-5| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ แล้ว $|(2x-1)-9| < \varepsilon$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x \to 5}(2x-1) = 9$ #

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่า $\lim_{x \to -1} (x^2 + 5) = 6$

วิธีคิด ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหาค่า $\delta > 0$

ซึ่งทำให้ สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $0 < |x+1| < \delta$ แล้ว $|(x^2+5) - 6| < \varepsilon$

พิจารณา $|(x^2+5) - 6| < \varepsilon$

จะเห็นว่า

$$|(x^2+5)-6| = |x^2-1| = |(x+1)(x-1)| = |x+1||x-1| < \varepsilon$$

ซึ่ง $|x+1||x-1| < \varepsilon$

ถ้าให้ $|x+1| < 1$ จะได้

$$|x| - |1| \leq |x+1| < 1$$

$$|x| < |1| + 1 = 2$$

$$|x-1| \leq |x| + |1| < 2 + |1| = 3$$

นั่นคือ $|x+1||x-1| < (1)(3) = 3$

ดังนั้น ให้ $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ จะได้ $\delta > 0$

ตัวอย่างที่ 5 (ต่อ)

วิธีทำ ให้ $x \in D_f$ ซึ่งทำให้ $0 < |x+1| < \delta$

จะได้ $0 < |x+1| < 1$ และ $0 < |x+1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

เนื่องจาก $|x+1| < 1$ จะได้ $|x-1| < 3$

ดังนั้น $|x+1||x-1| < \left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)(3) = \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\left|\left(x^2+5\right)-6\right| < \varepsilon$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^2+5\right) = 6$ #