3. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ทฤษฎีบทที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน (ถ้ามี) จะมีได้เพียงลิมิตเดียวเท่านั้น

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ $f(x) = c$ สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = c$

ทฤษฎีบทที่ 3 ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = a$

ทฤษฎีบทที่ 4 ถ้าให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี $\lim_{x \to a} f(x) = A$ และ $\lim_{x \to a} f(x) = B$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

บทแทรกที่ 5 ให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = A_2$, $\lim_{x \to a} f_3(x) = A_3$, ..., $\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)\right] = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

ทฤษฎีบทที่ 6 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมี $\lim_{x \to a} f(x) = A$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = B$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B$$

บทแทรกที่ 7 ให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมี $\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = A_2$, $\lim_{x \to a} f_3(x) = A_3$, ..., $\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)\right] = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n$$

ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $f(x)=x^n$ สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} f(x)=a^n$$

ทฤษฎีบทที่ 9 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ $\lim_{x\to a} f(x)=A$ สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot A$$

ทฤษฎีบทที่ 10 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี $\lim_{x\to a} f(x)=A$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=B$ โดยที่ $B\neq 0$

จะได้ว่า $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

ทฤษฎีบทที่ 11 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันโดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $g(b)$ หาค่าได้

ถ้า $\lim_{x\to b} g(x)=g(b)$ และ $\lim_{x\to a} f(x)=b$ แล้ว จะได้ว่า $\lim_{x\to a}(gof)(x)=g(b)$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-5x+9\right)$

วิธีทำ โดยการใช้ทฤษฎีบทที่ 4 สามารถเขียนค่าของลิมิตได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(x^2-5x+9\right) &= \lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}5x+\lim_{x\to 2}9 \\
&= 2^2-5(2)+9 \\
&= 4-10+9 \\
&= 3 \qquad\qquad \#
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{2x^2+6}{x^3+4x-1}\right)$

วิธีทำ โดยการใช้ทฤษฎีบทที่ 4 จะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1}\left(2x^2+6\right) &= \lim_{x \to -1}\left(2x^2\right)+\lim_{x \to -1} 6 \\
&= 2(-1)^2+6 \\
&= 2+6 \\
&= 8
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -1}\left(x^3+4x-1\right) &= \lim_{x \to -1}\left(x^3\right)+\lim_{x \to -1}(4x)-\lim_{x \to -1}(1) \\
&= (-1)^3+4(-1)-1 \\
&= -1-4-1 \\
&= -6
\end{aligned}$$

โดยการใช้ทฤษฎีบทที่ 10 จะได้

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^2+6}{x^3+4x-1}\right) &= \frac{\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2+6\right)}{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+4x-1\right)} \\ &= -\frac{8}{6} \\ &= -\frac{4}{3} \qquad \#\end{aligned}$$

หมายเหตุ ในการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 10 นั้นมีข้อควรระวัง ก็คือ ลิมิตของตัวส่วนจะต้องมีค่าไม่เท่ากับศูนย์

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3\sqrt{x+6}\right)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\left(x^3\sqrt{x+6}\right) &= \lim_{x\to -2}\left(x^3\right)\cdot \lim_{x\to -2}\left(\sqrt{x+6}\right) \\
&= \lim_{x\to -2}\left(x^3\right)\cdot \sqrt{\lim_{x\to -2}(x+6)} \\
&= (-8)\cdot(2) \\
&= -16 \qquad \#
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2ah+h^2}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}(2a+h) \\
&= 2a \qquad \#
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}\right)\\
&= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+9}\right)+\lim_{x\to 0}(3)}\\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

#

หมายเหตุ จะเรียก $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ ว่าลิมิตรูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form) $\dfrac{0}{0}$ ซึ่งจะได้ศึกษารายละเอียดในบทที่ 5

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหาค่าของลิมิตแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\lim_{x \to -2} \left(x^2 - 4\right)$

2) $\lim_{x \to -1} \left(1 - 2x^2 + x^3\right)$

3) $\lim_{x \to 1} \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 1\right)$

4) $\lim_{t \to 4} 8(t-5)(t+3)$

5) $\lim_{r \to -2} \left(r^3 \sqrt{r^2 + 7}\right)$

6) $\lim_{x \to -4} (x+3)^{2560}$

7) $\lim_{t \to -1} 3(2t-1)^2$

8) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 - 2}{x - 1}\right)$

9) $\lim_{u \to 5} \left(\frac{u - 5}{u^2 - 25}\right)$

10) $\lim_{t \to 1} \left(\frac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}\right)$

11) $\lim_{s \to -1} \left(\frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 - t - 2}\right)$

12) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}\right)$

13) $\lim_{t \to 1} \left(\frac{t - 1}{\sqrt{t + 3} - 2}\right)$

14) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}\right)$

จบบทที่ 1