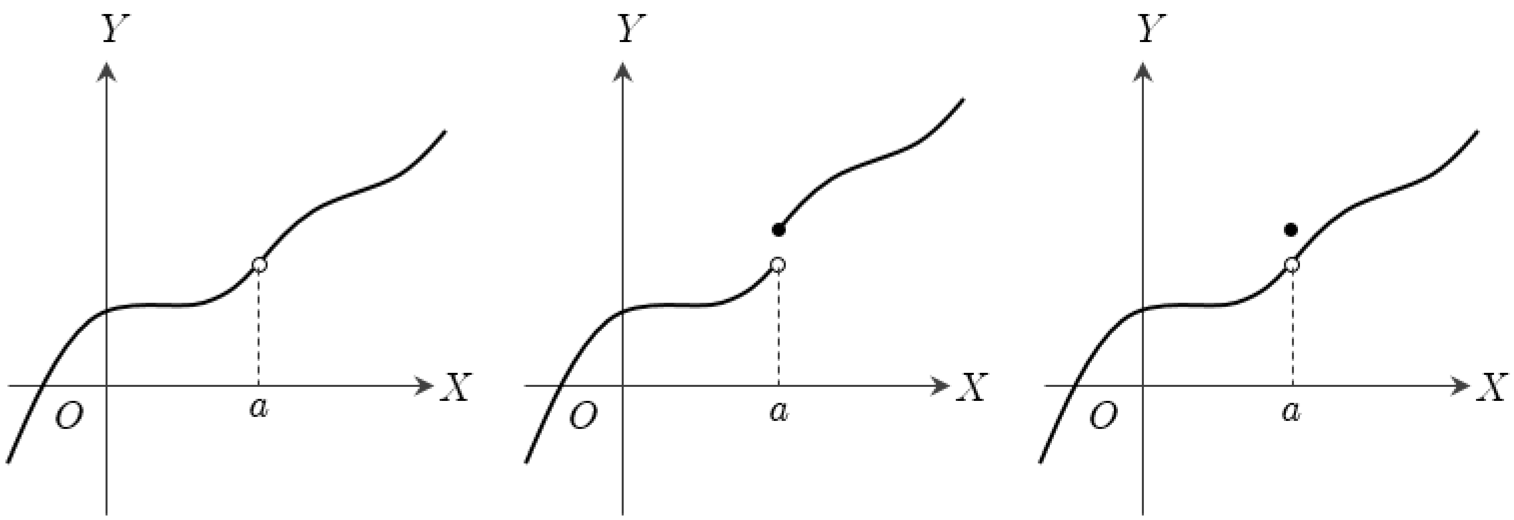
บทที่ 2
ความต่อเนื่อง

2.1 ความต่อเนื่องที่จุด

พิจารณาฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้



ภาพที่ 2.1 กราฟของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a

บทนิยาม

บทนิยามที่ 2.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subset R$ และ $a \in D$ จะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มีค่า
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

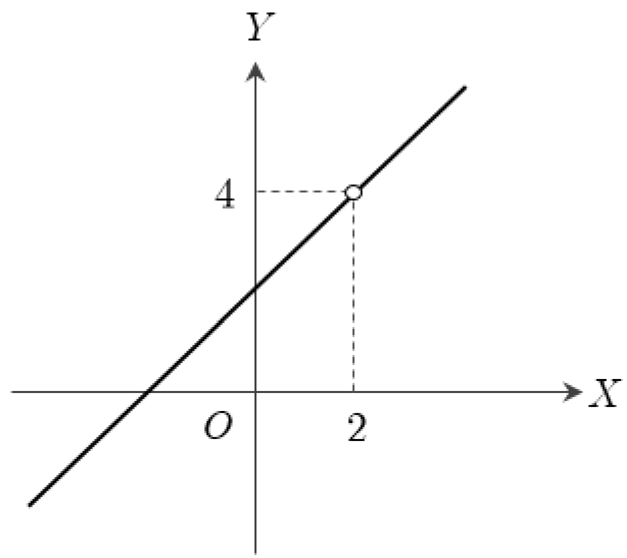
หมายเหตุ ถ้าเงื่อนไขบทนิยามที่ 2.1 ข้อใดข้อหนึ่งไม่จริง จะกล่าวว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนด $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $f(2)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ #

และเมื่อพิจารณากราฟ จะเห็นว่าที่ $x=2$ กราฟขาดตอน

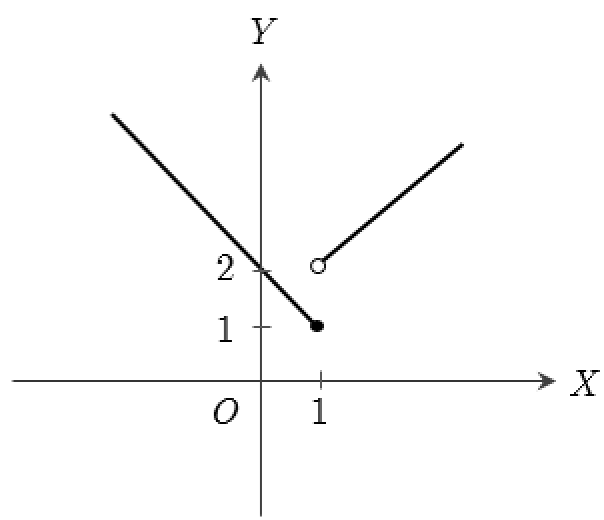


ตัวอย่างที่ 2.2 ถ้ากำหนด $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; x \le 1 \\ x+1 & ; x > 1 \end{cases}$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ 1. จะเห็นว่า $f(1) = 2-1 = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1+1 = 2$ และ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2-1 = 1$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ไม่มีค่า



เมื่อพิจารณาจากลักษณะของกราฟ พบว่ากราฟของ f ขาดตอนที่ $x = 1$

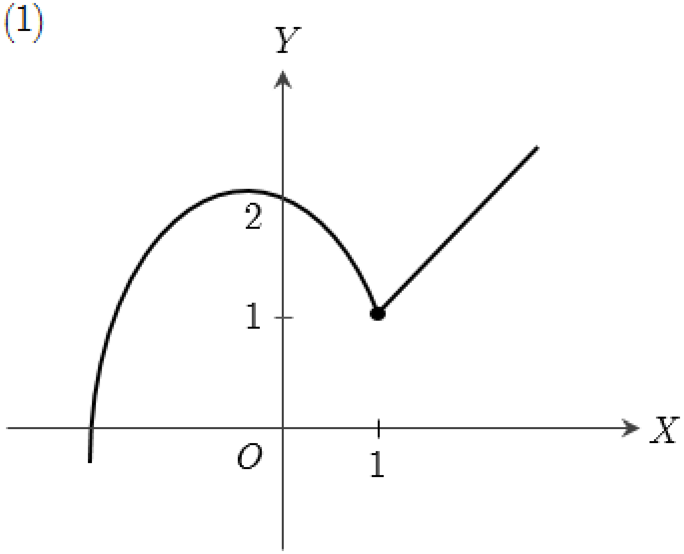
ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$ #

ตัวอย่างที่ 2.3 ถ้ากำหนด $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & ; x < 1 \\ x & ; x \geq 1 \end{cases}$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

วิธีทำ 1. จะเห็นว่า $f(x) = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 - 1 = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

และ 3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$



จะเห็นว่า $f(1) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ ลักษณะกราฟของ f ไม่ขาดตอนที่ $x = 1$ #

2.2 ความต่อเนื่องบนช่วง

ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ความต่อเนื่องที่จุด จะพิจารณาถึงความต่อเนื่องที่จุดใด จุดหนึ่งเท่านั้น ต่อไปจะกล่าวถึงความต่อเนื่องบนช่วง ซึ่งจะพิจารณาถึงความต่อเนื่องที่จุดทุกจุดในช่วงนั้น

บทนิยามที่ 2.2 ให้ S เป็นเซตใด ๆ ฟังก์ชัน f จะมีความต่อเนื่องบน S ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดใน S

บทนิยามที่ 2.3 ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(a,\ b)$ ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดบนช่วง $(a,\ b)$

บทนิยามที่ 2.4 ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,\ b]$ ก็ต่อเมื่อ

1. f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(a,\ b)$
2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนด $f(x)=\begin{cases}2x & ;\ 0\le x<1\\ 2-x & ;\ 1\le x\le 2\end{cases}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,\ 2]$ หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาบนช่วง $(0,\ 1)$

ให้ $x_0\in(0,\ 1)$

1. $f(x_0)=2x_0$ ถ้า $0\le x<1$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}2x=2x_0$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=2x_0$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $(0,\ 1)$ พิจารณาที่ $x=1$

1. $f(1)=2-1=1$ ถ้า $1\le x\le 2$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2$

และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=2-1=1$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x)$ ไม่มีค่า

นั่นคือ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

แต่ $1 \in [0,\ 2]$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\ 2]$ #

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ 0 \le x < 2 \\ 2 - x & ;\ x \ge 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[1,\ 3)$ หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาบนช่วง $(1,\ 2)$ ให้ $x_0 \in (1,\ 2)$

1. $f(x_0) = x_0^2$ ถ้า $0 \le x < 2$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2 = f(x_0)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $(1,\ 2)$

พิจารณาที่ $x = 2$

1. $f(2) = 2 - 2 = 0$ ถ้า $x \geq 2$

2. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

และ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2 - x) = 2 - 2 = 0$

จะเห็นว่า $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} f(x)$ ไม่มีค่า

นั่นคือ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

แต่ $2 \in [1,\ 3)$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[1,\ 3)$ #

ข้อสังเกต

1. ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องบนช่วง $(a,\ b)$ แล้ว f ไม่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,\ b]$ ด้วย
2. ถ้า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,\ b]$ แล้ว f จะมีความต่อเนื่องบนช่วง $(a,\ b)$ ด้วย

2.3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันนี้ จะให้เฉพาะทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ เพื่อนำไปใช้ในการหาความต่อเนื่องได้ง่ายขึ้น

บทนิยามที่ 2.5 ฟังก์ชันโพลิโนเมียล (polynomial function) คือ ฟังก์ชัน f ที่นิยามว่า

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

โดย $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 2.1 ฟังก์ชันโพลิโนเมียลจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่นิยามว่า

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$f(a) = c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \dots + c_2 a^2 + c_1 a + c_0$$

ซึ่งหาค่าได้ทุก ๆ จำนวนจริง a

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \ = \ f(a)$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไปยัง R เมื่อ $D \subset R$ และ $a \in D$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้วจะได้ว่า

1. $f + g$ และ $f - g$ มีความต่อเนื่องที่ $x = a$
2. $c \cdot f$ มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
3. $f \cdot g$ มีความต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\dfrac{f}{g}$ มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ ถ้า $g(x) \neq 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ $x = a$

แสดงว่า $f(x), g(x)$ หาค่าได้ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

1. จะได้ว่า $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ หาค่าได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f+g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] \\
&= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \\
&= f(a)+g(a) \\
&= (f+g)(a)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f+g$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ $x = a$

ทฤษฎีบทที่ 2.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = f(x)$ จะได้ว่า gof เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ และ $\lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = g \lim_{x \to a} f(x)$

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

จะได้ว่า $f(a)$ หาค่าได้ และ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

และเนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = f(a)$

จะได้ว่า $g\left(f(x)\right)$ หาค่าได้ และ $\lim_{x \to f(a)} g(x) = g\left(f(x)\right)$

ดังนั้น $g\left(f(a)\right) = (gof)(a)$ หาค่าได้ จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = g\left(f(a)\right) = (gof)(a) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

เพราะฉะนั้น gof เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$

จาก (2.1) จะได้ว่า

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = \lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = g\left(f(a)\right) = g \lim_{x \to a} f(x)$$

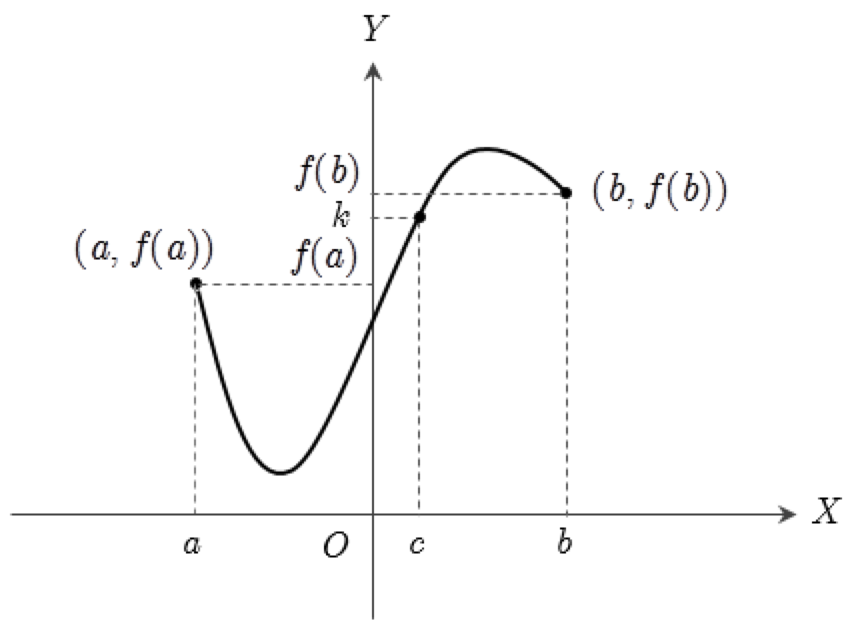
หมายเหตุ จากทฤษฎีบทที่ 2.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง สำหรับทุก ๆ จุดในเซต S แล้วจะได้ว่า

1. $f+g$ และ $f-g$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดในเซต S
2. $c \cdot f$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดในเซต S เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
3. $f \cdot g$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดในเซต S
4. $\dfrac{f}{g}$ มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดในเซต S ถ้า $g(x) \neq 0$ สำหรับสมาชิก a ทุกตัวที่อยู่ในเซต S

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ทฤษฎีบทค่ากลาง (The Intermediate Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,\ b]$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว จะต้องมีจำนวนจริง $c \in [a,\ b]$ อย่างน้อยหนึ่งจำนวน ที่ทำให้ $f(c) = k$

พิจารณากราฟของฟังก์ชันดังรูปต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 2.6 ถ้ากำหนด $f(x)=2x-x^2$ เมื่อ $x\in[0,\ 4]$ แล้วจงตรวจสอบว่าจะมี $x\in[0,\ 4]$ ซึ่งทำให้ $f(x)=-3$ หรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=2x-x^2$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,\ 4]$

โดยที่ $f(0)=0$ และ $f(-4)=8$

ให้ $k=-3$ จะได้ว่า $-8<k<0$

โดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่ามี $c\in[0,\ 4]$ อย่างน้อยหนึ่งจำนวน

ที่ทำให้ $f(x)=k=-3$

จาก $f(c)=-3$ จะได้ว่า
$$\begin{aligned} 2c-c^2 &= -3 \\ c^2-2c-3 &= 0 \\ (c+1)(c-3) &= 0 \\ c &= -1,\ 3 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น มี $x\in[0,\ 4]$ ที่ทำให้ $f(x)=-3$ คือ 3 #

2.4 ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์

ในบทที่ผ่านมาได้กล่าวถึง $\lim_{x \to a} f(x) = L$ เมื่อ a และ L เป็นจำนวนจริง

สำหรับบทนี้จะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด รวมทั้งการพิจารณากรณีที่ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด โดยแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1</u> ลิมิตมีค่าเป็นจำนวนจริง เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

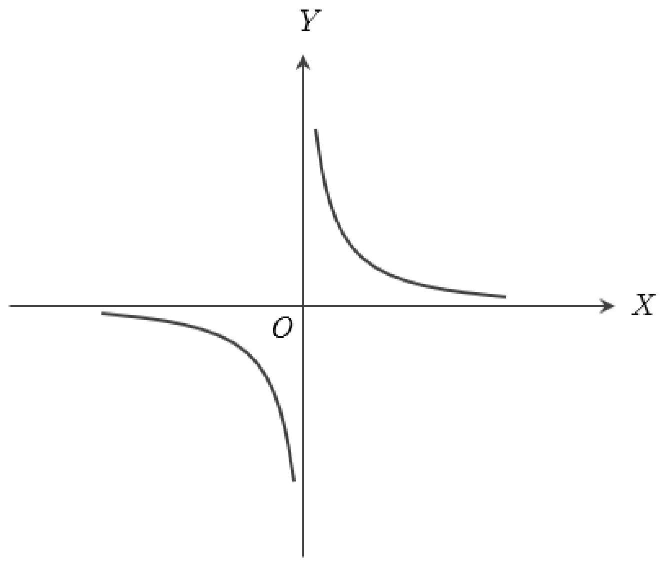
<u>กรณีที่ 2</u> ลิมิตเมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

2.4.1 ลิมิตมีค่าเป็นจำนวนจริง เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \dfrac{1}{x}$

จะพบว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุด ยกเว้นที่ $x = 0$

และสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังนี้

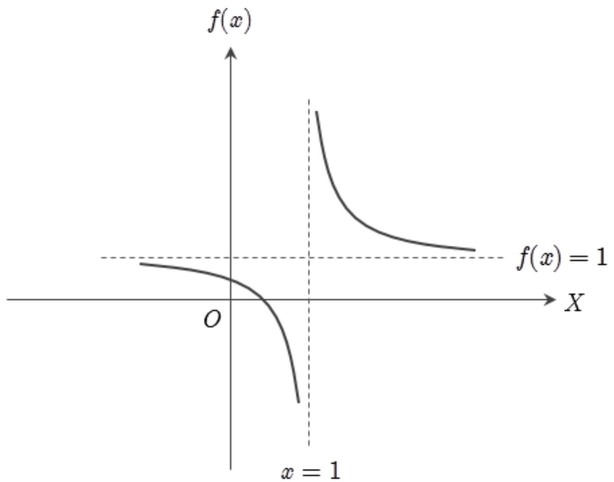


ภาพที่ 2.2 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$

จากภาพที่ 2.2 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 0 ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็น 0 เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ และเมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 0 ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็น 0 เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ เมื่อ $x\neq 1$ จงหา $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

วิธีทำ จากฟังก์ชัน f เขียนกราฟได้ดังรูป



พิจารณาเมื่อ $x>1$

$$f(1.5)=3,\ f(3)=1.5,\ f(10)=\frac{10}{9},\ f(100)=\frac{100}{99},\ f(1000)=\frac{1000}{999},\ \ldots$$

จะเห็นว่า ถ้าค่า x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณา $x<1$ จะได้ว่า

ถ้า x มีค่าลดลงเรื่อย ๆ ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ #

หมายเหตุ สัญลักษณ์ ∞ และ $-\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง จะใช้สัญลักษณ์ $x \to \infty$ ในความหมายที่ว่า "x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด" และใช้สัญลักษณ์ $x \to -\infty$ ในความหมายที่ว่า "x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด"

ข้อสังเกต ถ้ากำหนดให้ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ มีค่า แล้ว ค่าของลิมิตจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น นอกจากนั้นทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.3 เป็นจริงในกรณีที่ลิมิตมีค่าเป็นจำนวนจริง เมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$

ทฤษฎีบทที่ 2.5 ถ้า $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

พิสูจน์ **1.** กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ เพราะฉะนั้น $N > 0$

ให้ $x \in D$ ซึ่ง $x > N$ จะได้ว่า $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{N} = \varepsilon$

นั่นคือ $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ #

ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim_{x \to \infty} c = c$

ทฤษฎีบทที่ 2.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to \infty} g(x) = M$ โดยที่ L และ M เป็นจำนวนจริง แล้ว จะได้ว่า

1. $\lim_{x \to \infty} c \cdot f(x) = c \cdot L$
2. $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm M$
3. $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L \cdot M$
4. $\lim_{x \to \infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2.6 และ 2.7 ใช้วิธีพิสูจน์เช่นเดียวกับการพิสูจน์ลิมิต เมื่อ $x \to a$

ทฤษฎีบทที่ 2.8 ให้ p เป็นจำนวนตรรกยะบวก จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}=0$

พิสูจน์ สมมติว่า $p=\frac{m}{n}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ m และ n เท่ากับ 1

สำหรับ $x>0$ จะได้ว่า $\frac{1}{x^p} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^p} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{0}\right)^m = 0$ #

หมายเหตุ สำหรับ $x<0$ และ x^p เป็นจำนวนจริง เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^p}=0$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตอนันต์ไปใช้ในการคำนวณค่าลิมิต

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-4}{2x^2+x^3}\right)$

วิธีทำ โดยการจัดรูป $\dfrac{3x^3-4}{2x^2+x^3} = \dfrac{3-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{2}{x}+1}$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+1\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\right) = 2(0)+1 = 1 \neq 0$

และ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(3-4\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right) = 3-4(0) = 3$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-4}{2x^2+x^3}\right) = \dfrac{3}{1} = 3$ #

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-25}{x^2+3}\right)$

วิธีทำ โดยการจัดรูป $\dfrac{9x-25}{x^2+3} = \dfrac{\dfrac{9}{x}-\dfrac{25}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}}$

จากทฤษฎีบทที่ 2.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{x}-\frac{25}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{25}{x^2}\right)\\
&= 9\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)-25\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= 9(0)-25(0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)\\
&= 1+3\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&= 1+3(0) = 1
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x-25}{x^2+3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{9}{x}-\frac{25}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9}{x}-\frac{25}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$ #

ตัวอย่างที่ 2.10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2-7}}{2x+3}\right)$

วิธีทำ
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3x^2-7}}{2x+3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{3x^2-7}\right)}{\left(-\frac{1}{x}\right)(2x+3)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{x}\right)^2\left(3x^2-7\right)}}{\left(-2-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\left(3-\frac{7}{x^2}\right)}}{\left(-2-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{7}{x^2}\right)}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{-2}$$ #

ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

วิธีทำ สำหรับ $x>0$ จะได้ว่า

$$\sqrt{x^2+2}-x = \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}$$

$$= \frac{\left(x^2+2\right)-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$= \frac{2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x} = \frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}$$

เพราะว่า $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right) = \sqrt{1+0}+1 = 2 \neq 0$ และ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{0}{2} = 0$ #

2.4.2 ลิมิตเมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

สังเกตดูค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากตารางต่อไปนี้

กรณี $x \to 1^+$

x	$\frac{3}{2}$	1.01	1.001	1.0001	...
$f(x)$	2	100	1000	10000	...

กรณี $x \to 1^-$

x	$\frac{1}{2}$	0.9	0.99	0.999	...
$f(x)$	–2	–10	–100	–1000	...

จากตารางจะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา แล้วจะได้ว่าค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

และถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย แล้วจะได้ว่าค่าของ $f(x)$ จะลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่า x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา

จะได้ว่า $\frac{x^2+4}{x-2}$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

นั่นคือ $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)=\infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.13 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)$

วิธีทำ จะเห็นว่า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย

จะได้ว่า $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

นั่นคือ $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right) = -\infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2^-} \left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} \right)$

วิธีทำ จะเห็นว่า x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย

จะได้ว่า $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

นั่นคือ $\lim_{x \to 2^-} \left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} \right) = -\infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.15 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 12}$

วิธีทำ จะเห็นว่า x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้าย

จะได้ว่า $\dfrac{1}{x^2 - 7x + 12}$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

นั่นคือ $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 12} = \infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.16 จงพิจารณาว่า $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2}$ มีค่าหรือไม่

วิธีทำ จาก $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ พิจารณาค่ารอบ ๆ ที่ $x=-2$

พบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ –2 ทางขวาและทางซ้าย

จะได้ว่า $\dfrac{1}{(x+2)^2}>0$

ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ไม่มีค่า #

ตัวอย่างที่ 2.17 จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}x^2$

วิธีทำ จะเห็นว่า ถ้าให้ x มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.18 จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-4x+7\right)$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $x^2-4x=x(x-4)$

เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น แล้ว $x(x-4)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัด

ดังนั้น $x(x-4)+7$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขีดจำกัดด้วย

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-4x+7\right)=\infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2-x^4}{x^3}\right)$

วิธีทำ ให้ $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{3x+2}$ จัดรูปฟังก์ชันใหม่ โดยนำ x หารทั้งเศษและส่วน

จะได้ $\dfrac{2x^2-5x+7}{3x+2} = \dfrac{2x-5+\dfrac{7}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}$

จะเห็นว่า เมื่อ $x\to\infty$ จะได้ $\left(2x-5+\dfrac{7}{x}\right)\to\infty$ และ $3+\dfrac{2}{x}\to 3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+7}{3x+2}\right) = \infty$ #

ตัวอย่างที่ 2.20 จงหา $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 - x^2 - x^4}{x^3} \right)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1 - x^2 - x^4}{x^3}$ จัดรูปฟังก์ชันใหม่

จะได้ $$\frac{1 - x^2 - x^4}{x^3} = \frac{-(x^4 + x^2 - 1)}{x^3} = \frac{-\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]}{x^3}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $x \to \infty$ จะได้ $-\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] \to -\infty$ และ $x^3 \to \infty$

นั่นคือ เมื่อ $x \to \infty$ จะได้ $-\frac{\left[\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]}{x^3} \to -\infty$

ดังนั้น $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 - x^2 - x^4}{x^3} \right) = -\infty$ #

จบบทที่ 2