



บทที่ 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต



3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง

การเขียนฟังก์ชันในวิชาแคลคูลัส มักจะเขียนเฉพาะสมการที่เป็นเงื่อนไขของฟังก์ชัน เช่น

$$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\} \text{ เขียนแทนด้วย } y = \sqrt{x} \text{ หรือ } f(x) = \sqrt{x}$$

บทนิยามที่ 3.1 ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไปเป็น $x + \Delta x$ โดยที่ $\Delta x \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ ไปเป็น $f(x + \Delta x)$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + \Delta x$ คือ $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ และอัตราการเปลี่ยนแปลง ของ y เทียบกับ x ในขณะ x มีค่าใด ๆ คือ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ตัวอย่างที่ 3.1 การสูบลมเข้าลูกบอล ถ้า v เป็นปริมาตรของลูกบอล (หน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร)

r เป็นรัศมีของลูกบอล (หน่วยเป็นเซนติเมตร) และ $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ จงหา

ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 6 เซนติเมตร เป็น 9 เซนติเมตร

ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับรัศมี ขณะรัศมีเป็น 9 เซนติเมตร



วิธีทำ ให้ $v = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับรัศมีในช่วงรัศมีจาก r เซนติเมตร เป็น

$$\begin{aligned} r + \Delta r \text{ เซนติเมตร คือ } \frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{\Delta r} &= \frac{1}{\Delta r} \cdot \frac{4}{3}\pi[(r + \Delta r)^3 - r^3] \\ &= \frac{1}{\Delta r} \cdot \frac{4}{3}\pi[3r^2\Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3] \\ &= \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2] \end{aligned}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 6 เซนติเมตร ถึง 9 เซนติเมตร หาได้จากการแทนค่า r ด้วย 6 และ Δr ด้วย 3

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2] &= \frac{4}{3}\pi[108 + 54 + 9] \\ &= \frac{4}{3}\pi(171) = 228\pi \end{aligned}$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรเทียบกับรัศมีเมื่อรัศมีเปลี่ยนจาก 6 เซนติเมตร เป็น 9 เซนติเมตร คือ 228π ลูกบาศก์เซนติเมตร/เซนติเมตร #



ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับรัศมี ขณะรัศมีเป็น r เซนติเมตร คือ

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{4}{3} \pi [3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2] = 4\pi r^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับรัศมี ในขณะ $r = 9$ เซนติเมตร คือ

$$4\pi(9)^2 = 324\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร/เซนติเมตร} \quad \#$$

ตัวอย่างที่ 3.2 ในการสูบน้ำออกจากสระ หลังจากสูบน้ำไป t นาที มีน้ำเหลือในสระ Q ลูกบาศก์เมตร

ความสัมพันธ์ระหว่าง t กับ Q อยู่ในรูปสมการ $Q = \left(12 - \frac{t}{10}\right)^2$ จงหา

ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาณน้ำในสระเทียบกับเวลา ในช่วงเวลา $t = 0$ นาที ถึง $t = 10$ นาที

ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณน้ำในสระเทียบกับเวลา ในขณะเวลา $t = 10$ นาที

วิธีทำ ให้ $Q = f(t) = \left(12 - \frac{t}{10}\right)^2$

ก) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาณน้ำในสระเทียบกับเวลา ในช่วงเวลา $t = 0$ นาที

ถึง $t = 10$ นาที เป็น $\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(10) - f(0)}{\Delta t}$



$$= \frac{\left(12 - \frac{10}{10}\right)^2 - \left(12 - \frac{0}{10}\right)^2}{10 - 0}$$

$$= \frac{-23}{10} = -2.3$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาณน้ำในสระเทียบกับเวลา ในช่วงเวลา $t = 0$ นาที ถึง $t = 10$ นาทีเป็น -2.3 ลบ.ม./นาที #

ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณน้ำในสระเทียบกับเวลา ในขณะเวลา t ใด ๆ

$$\text{คือ } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(12 - \frac{t + \Delta t}{10}\right)^2 - \left(12 - \frac{t}{10}\right)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-24\Delta t + 0.02t(\Delta t) + \frac{(\Delta t)^2}{100}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-2.4 + 0.02t + \frac{\Delta t}{100} \right) = -2.4 + 0.02t$$

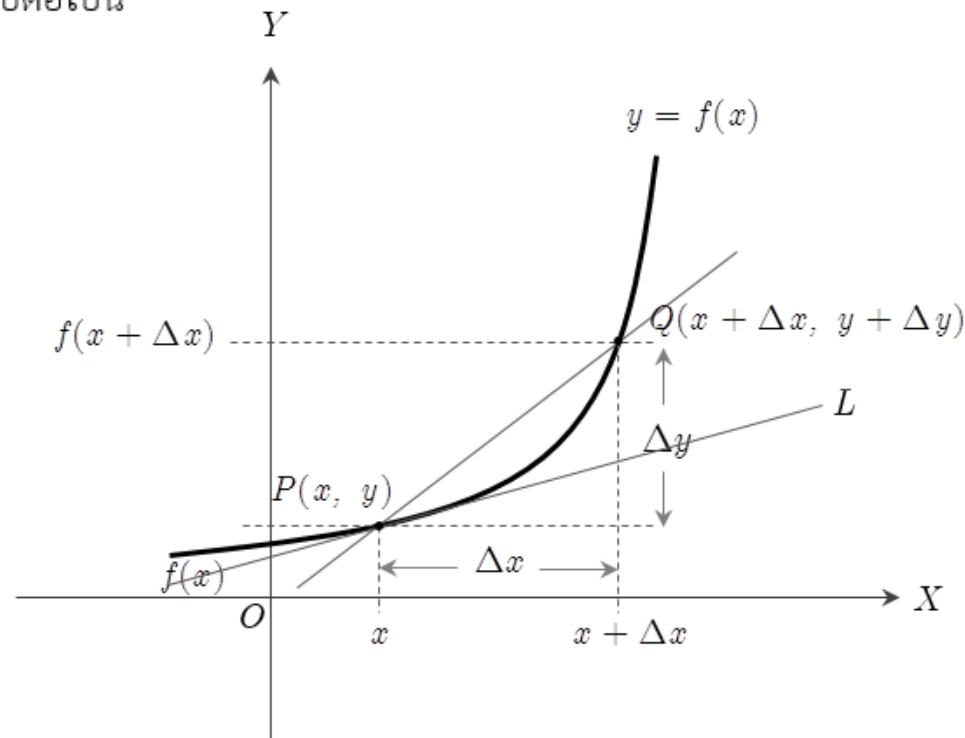
ดังนั้น ขณะเวลา $t = 10$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเป็น $-2.4 + 0.02(10) = -2.2$ ลูกบาศก์เมตร/นาที #



3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดหนึ่งบนเส้นโค้งใกล้กับจุด P

พิจารณารูปต่อไปนี้



ภาพที่ 3.1 กราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$



โดยเรียก Δx (delta x) ว่า ส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x (increment of x)

และเรียก Δy (delta y) ว่า ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f (increment of y)

อัตราส่วน $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ คือ อัตราส่วนระหว่างส่วนเปลี่ยนแปลงของ

ฟังก์ชัน f กับส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x ในช่วงใกล้ ๆ x กับ $x + \Delta x$

ถ้าลิมิตของอัตราส่วน $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 มีค่า เรียกค่าลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$y = f(x)$ เทียบกับ x

บทนิยามที่ 3.2 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $y = f(x)$ จะเรียก

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อลิมิตมีค่าและเป็นจำนวนจริง ว่าเป็น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับ x และจะกล่าวว่า f มีอนุพันธ์

ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x)$ หรือ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ $D_x f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ หรือ y'



บทนิยามที่ 3.3 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

คือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ f ที่จุด $(x, f(x))$

บทนิยามที่ 3.4 ถ้า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ มีค่า จะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ทางซ้ายของฟังก์ชัน f ที่ x และถ้า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ มีค่า จะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ทางขวาของฟังก์ชัน f ที่ x

จะใช้สัญลักษณ์ $f'(x^-)$ และ $f'(x^+)$ แทนอนุพันธ์ทางซ้ายและอนุพันธ์ทางขวา ตามลำดับ
นั่นคือ $f'(x)$ จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $f'(x^-) = f'(x^+)$ และ $f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$

บทนิยามที่ 3.5 กำหนด $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ x สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ และ f มีอนุพันธ์บนช่วง $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ช่วง (a, b) โดยที่ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่ $x = a$ และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่ $x = b$



ทฤษฎีบทที่ 3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ $x = a$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ และ $f'(a)$ มีค่า

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ มีค่า

$$\begin{aligned} \text{จาก } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) = f(a)$ ฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = a$

ข้อสังเกต บทกลับของทฤษฎีบทที่ 3.1 ไม่เป็นจริง นั่นคือ ถ้า f จะมีความต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว f อาจจะไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$



ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนด $f(x) = x^3 - 3x + 1$ จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$ หรือไม่ ถ้ามี
จงหา $f'(2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \frac{[(2 + \Delta x)^3 - 3(2 + \Delta x) + 1] - [2^3 - 3(2) + 1]}{\Delta x} \\ &= \frac{9\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= 9 + 6(\Delta x) + (\Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [9 + 6(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 9\end{aligned}$$

ดังนั้น f มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$ และได้ว่า $f'(2) = 9$

#



ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x < 2 \\ 2x^2 + 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$

หรือไม่ ถ้ามี จงหา $f'(2)$

วิธีทำ จากบทนิยาม $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ เมื่อลิมิตมีค่า

จะหา $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ โดยการพิจารณาจากลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x - 6}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x - 2)}{x - 2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x^2 + 2) - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x + 2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

เพราะว่า $f'(2^-) \neq f'(2^+)$

นั่นคือ $f'(2)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 2$

#



ตัวอย่างที่ 3.6 ให้ $y = x^3 - 4x^2 + 4$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = 1$

วิธีทำ จากบทนิยาม $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตมีค่า

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x)^3 - 4(x + \Delta x)^2 + 4] - (x^3 - 4x + 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 8x\Delta x - 4(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 8x - 4\Delta x] \\ &= 3x^2 - 8x \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด } x = 1 \text{ คือ } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 3(1)^2 - 8(1) = -5 \quad \#$$



3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว และ $f(x) = c$ แล้ว $\frac{d}{dx}[f(x)] = 0$

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว และ $f(x) = c$

$$\text{จากบทนิยาม } \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = 0 \text{ หรือ } \frac{d}{dx} c = 0$$



ตัวอย่างที่ 3.7

1) ถ้า $f(x) = 4$ แล้ว $f'(4) = 0$ #

2) ถ้า $y = -\frac{1}{2}$ แล้ว $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ #

3) ถ้า $y = \pi$ แล้ว $\frac{d}{dx}(\pi) = 0$ #

4) ถ้า $y = \sqrt[3]{4.25}$ แล้ว $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{4.25}) = 0$ #



ทฤษฎีบทที่ 3.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ และ $f(x) = x$ แล้ว $\frac{d}{dx}[f(x)] = 1$

พิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

นั่นคือ $f(x) = x$

$$f(x+h) = x+h$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 1$



ทฤษฎีบทที่ 3.4 ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

พิสูจน์ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

จากทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] = nx^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$



ตัวอย่างที่ 3.8

1) ถ้า $f(x) = x^6$ แล้ว $f'(x) = 6x^5$ #

2) ถ้า $y = x^{1000}$ แล้ว $\frac{d}{dx}(x^{1000}) = 1000x^{999}$ #

3) ถ้า $y = t^4$ แล้ว $\frac{d}{dt}t^4 = 4t^3$ #

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $c \cdot f$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$

ตัวอย่างที่ 3.9

1) ถ้า $f(x) = 4x^3$ แล้ว $f'(x) = 4(3)x^2 = 12x^2$ #

2) ถ้า $y = 5x^4$ แล้ว $\frac{d}{dx}(5x^4) = 5 \frac{d}{dx}(x^4) = 5(4)x^3 = 20x^3$ #

3) $\frac{d}{dr}(-2r^3) = -2 \frac{d}{dr}(r^3) = -2(3)r^2 = -6r^2$ #

4) ถ้า $f(x) = \frac{2}{5}x^5$ แล้ว $f'(x) = \frac{2}{5}(5)x^4 = 2x^4$ #



ทฤษฎีบทที่ 3.6 ถ้ากำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $f + g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์ } \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \end{aligned}$$

เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

หมายเหตุ ผลที่ได้จากทฤษฎีบทที่ 3.6 อาจเขียนย่อ ๆ ได้ว่า

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$\text{เนื่องจาก } f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$$



ตัวอย่างที่ 3.10 กำหนดให้ $y = x^3 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\ &= \frac{d}{dx}(x^3) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) + 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\ &= 8x^7 + 12(5)x^4 - 4(4)x^3 + 10(3)x^2 + 6 + 0 \\ &= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 + 6\end{aligned}\quad \#$$

ตัวอย่างที่ 3.11 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(0, 1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ จะได้ว่า

$$f(0) = 0^3 - 2(0)^2 + 0 + 5 = -3$$

นั่นคือความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(0, 1)$ คือ $f'(0)$

นั่นคือ $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 4(0) + 1 = 1$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(0, 1)$ คือ $y - 1 = 1(x - 0)$

หรือ $x - y + 1 = 0 \quad \#$



ทฤษฎีบทที่ 3.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $f \cdot g$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$

ตัวอย่างที่ 3.12

$$1) \text{ ถ้า } y = (6t^3)(7t^4) \text{ แล้ว } y' = (6t^3)(28t^3) + (7t^4)(18t^2) = 294t^6 \quad \#$$

$$2) \frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^3+3)] = (x^2+1)(2x^2) + (x^3+3)(2x) = 5x^4 + 3x^2 + 6x \quad \#$$

ทฤษฎีบทที่ 3.8 ถ้ากำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ จะ

$$\text{เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ } x \text{ และ } \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$



ตัวอย่างที่ 3.13

$$\begin{aligned}
 1) \text{ ถ้า } y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \text{ แล้ว } \frac{dy}{dt} &= \frac{(t^2 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \quad \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6} \right] &= \frac{(x^3 + 6) \frac{d}{dx} (x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2) \frac{d}{dx} (x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\
 &= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
 &= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\
 &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2} \quad \#
 \end{aligned}$$



ทฤษฎีบทที่ 3.9 ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และนิยามว่า $f(x) = x^n$ เมื่อ $n \in R$ และ $x \neq 0$ แล้ว $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 3.14

1) ถ้า $f(x) = \frac{3}{8}x^\pi$ แล้ว $f'(x) = \frac{3}{8}\pi x^{\pi-1}$ #

2) $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ #



สูตรการหาอนุพันธ์

กำหนดให้ f , g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ c เป็นค่าคงตัว

$$1. \frac{d}{dx} c = 0$$

$$2. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$3. \frac{d}{dx} c[f(x)] = c \frac{d}{dx} [f(x)]$$

$$4. \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \text{ เมื่อ } n \in R$$

$$5. \frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] \pm \frac{d}{dx} [g(x)]$$

$$6. \frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot \frac{d}{dx} [g(x)] + g(x) \cdot \frac{d}{dx} [f(x)]$$

$$7. \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \cdot \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2} \text{ เมื่อ } g(x) \neq 0$$

$$8. \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = - \frac{\frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2} \text{ เมื่อ } g(x) \neq 0$$



ทฤษฎีบทที่ 3.12 (กฎลูกโซ่ : The Chain Rule)

ถ้ากำหนด f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว $g \circ f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ถ้า $y = g(f(x)) = g(u)$ และ $u = f(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ หรือ $h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

ตัวอย่างที่ 3.15 กำหนด $y = u^3 + 2 - 5u^{-2}$ และ $u = 2x + 3$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{du}(u^3 + 2 - 5u^{-2}) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\
 &= (3u^2 + 0 + 10u^{-3})(2) \\
 &= 6u^2 + 20u^{-3} \\
 &= 6(2x + 3)^2 + \frac{20}{(2x + 3)^3} \quad \#
 \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 3.16 กำหนด $u = 3x + \sqrt{x}$ และ $y = f(x)$ โดยที่ $f'(4) = 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}$

วิธีทำ จาก $u = 3x + \sqrt{x}$ จะได้ว่า $\frac{du}{dx} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}\text{โดยกฎลูกโซ่ จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u) \cdot \left(3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $u = 4$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} &= f'(u) \left(3 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 5 \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{35}{2} \quad \# \end{aligned}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ฟังก์ชันประกอบมีฟังก์ชันมาประกอบมากกว่า 2 ฟังก์ชัน ซึ่งสามารถหาฟังก์ชันประกอบได้เช่น $y = f(u)$, $u = g(v)$ และ $v = h(x)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

หรือ $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(v) \cdot h'(x)$ กฎนี้เรียกว่า กฎลูกโซ่ เช่นกัน



3.4 อนุพันธ์อันดับสูง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x โดยที่ $y = f(x)$

อนุพันธ์ของ f ที่ x คือ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า และถ้า f' เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว อนุพันธ์ของ f' อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f'' หรือ y'' หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$

ซึ่งนิยามว่า $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า และเรียก f'' ว่าอนุพันธ์อันดับที่สองของ f

ทำนองเดียวกัน ถ้า f'' เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

อนุพันธ์ของ f'' จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f''' หรือ y''' หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$

ซึ่งนิยามว่า $f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า และเรียก f''' ว่าอนุพันธ์อันดับที่สามของ f

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่สี่ อันดับที่ห้า ... ของ f ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, ...



ตัวอย่างที่ 3.17 กำหนด $y = f(x) = 4x^5 - 3x^4$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง อันดับที่สอง และอันดับที่สาม

วิธีทำ จาก $f(x) = 4x^5 - 3x^4$

$$\text{จะได้ว่า } f'(x) = \frac{d}{dx}[4x^5 - 3x^4]$$

$$= 20x^4 - 12x^3 \quad \#$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[20x^4 - 12x^3]$$

$$= 80x^3 - 36x^2 \quad \#$$

$$\text{และ } f'''(x) = \frac{d}{dx}[80x^3 - 36x^2]$$

$$= 240x^2 - 72x \quad \#$$



3.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

หัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตหรืออนุพันธ์ของฟังก์ชันชัดเจน (explicit function) และอนุพันธ์อันดับสูง ซึ่งอยู่ในรูป $y = f(x)$ สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันชัดเจน หรืออาจจะเรียกอีกอย่างว่า ฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function)

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ต่อไปนี้

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{..... (3.2)}$$

$$\text{หรือ } x^2 + xy + y^3 - 2x + 3y = 0 \quad \text{..... (3.3)}$$

ตัวแปร y ในแต่ละสมการ นิยามว่าเป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งแต่ละสมการสามารถเขียน y ในรูปของตัวแปร x ได้หรือไม่ ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ที่ปรากฏ เช่น สมการ (3.2) พบว่าสามารถเขียน y ในรูปของ x ได้ดังนี้

$$y = f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{หรือ} \quad y = f(x) = -\sqrt{9 - x^2} \quad \text{เมื่อ } x \in [-3, 3]$$



ตัวอย่างที่ 3.18 กำหนด y เป็นฟังก์ชันโดยปริยายด้วยสมการ

$$x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$$

จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ และที่จุด $(-1, 2)$

วิธีทำ จาก $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$

$$\text{จะได้ } \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2y) - 2\frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$3x^2 + \left(x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy\right) - 4xy \frac{dy}{dx} - 2y^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 2xy - 3x^2}{x^2 + 3y^2 - 4xy}$$

ที่จุด (x, y) ใด ๆ โดยที่ $x^2 + 3y^2 - 4xy \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้นที่จุด } (-1, 2) \text{ จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{2(2)^2 - 2(-1)(2) - 3(-1)^2}{(-1)^2 + 3(2)^2 - 4(-1)(2)} \\ &= \frac{8 + 4 - 3}{1 + 12 + 8} \\ &= \frac{9}{21} = \frac{3}{7} \end{aligned} \quad \#$$



ตัวอย่างที่ 3.19 กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 16$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ และสมการของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(1, 2)$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + y^2 = 16$

หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x ทั้งสองสมการ

$$\text{จะได้ว่า } \frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}(16)$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\text{ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดใด ๆ คือ } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\text{นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด } (1, 2) \text{ คือ } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1, y=2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสที่จุด } (1, 2) \text{ คือ } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\text{หรือ } x + 2y - 5 = 0$$

#



จบบทที่ 3