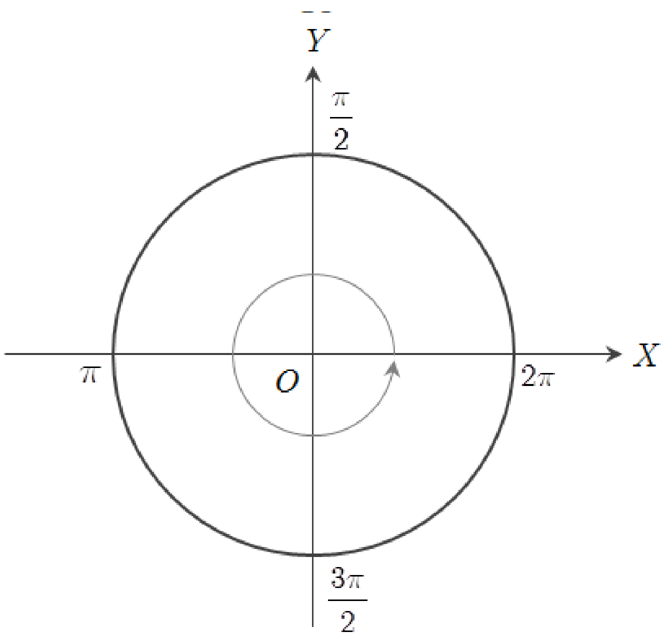
บทที่ 4
อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย

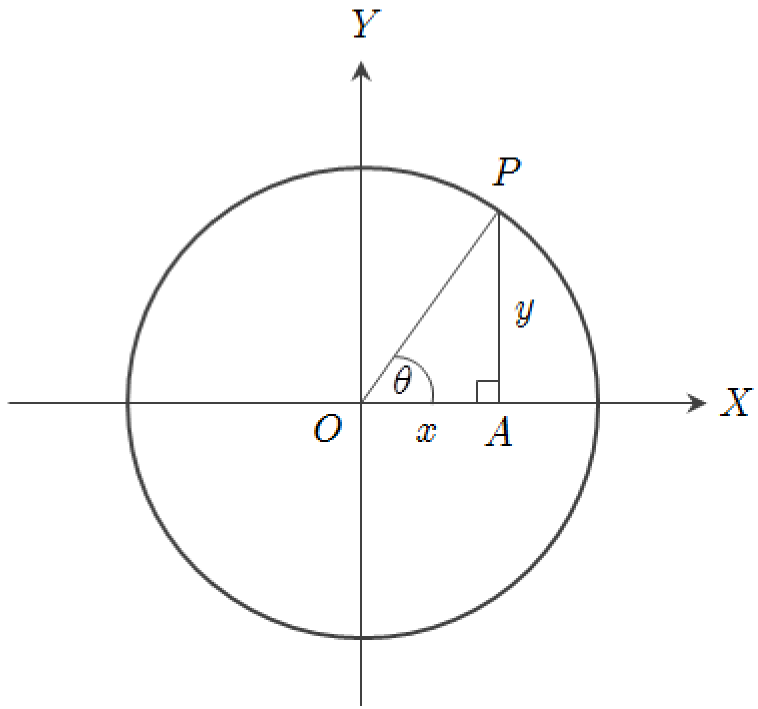
4.1 วงกลมหนึ่งหน่วย

วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle) คือ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และมีรัศมียาวหนึ่งหน่วย จากความรู้เรื่องความยาวเส้นรอบวง ซึ่งหาได้จากสูตร $2\pi r$ ดังนั้น วงกลมหนึ่งหน่วย จะมีความยาวของเส้นรอบวงเป็น 2π หน่วย และจากความรู้เรื่องมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะได้ว่ามีค่าเท่ากับ $360°$



ภาพที่ 4.1 วงกลมหนึ่งหน่วย

พิจารณารูปต่อไปนี้



ภาพที่ 4.2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากในวงกลมหนึ่งหน่วย

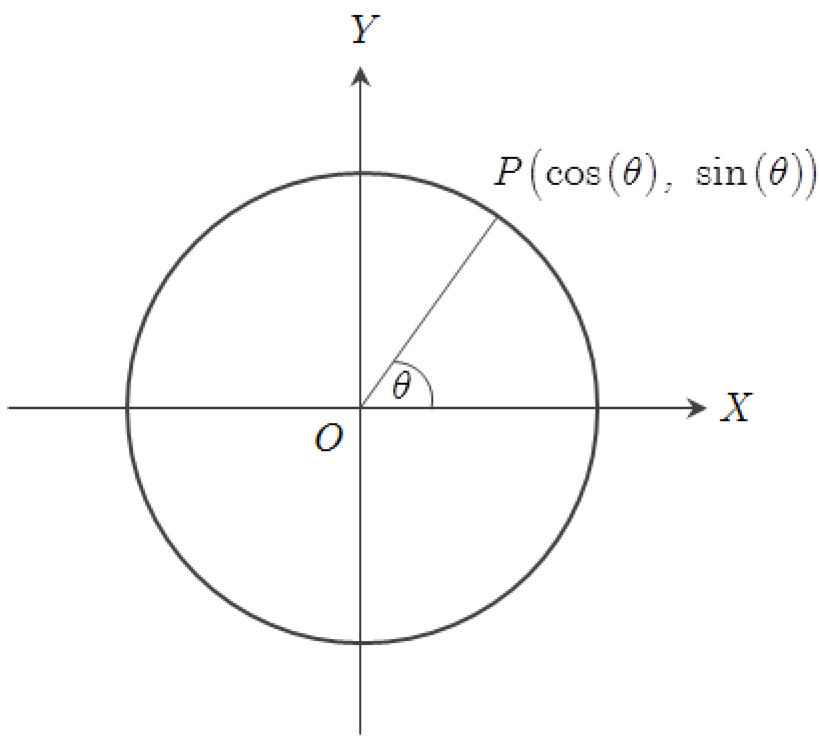
พิจารณาภาพที่ 4.2 พบว่าเนื่องจาก OP คือ รัศมีวงกลมยาวหนึ่งหน่วย

เพราะฉะนั้น $\sin(\theta) = \dfrac{y}{1} = y$ และ $\cos(\theta) = \dfrac{x}{OP}$

และเนื่องจาก OP คือรัศมีวงกลมที่ยาว 1 หน่วย เพราะฉะนั้น $\cos(\theta) = \dfrac{x}{1} = 1$

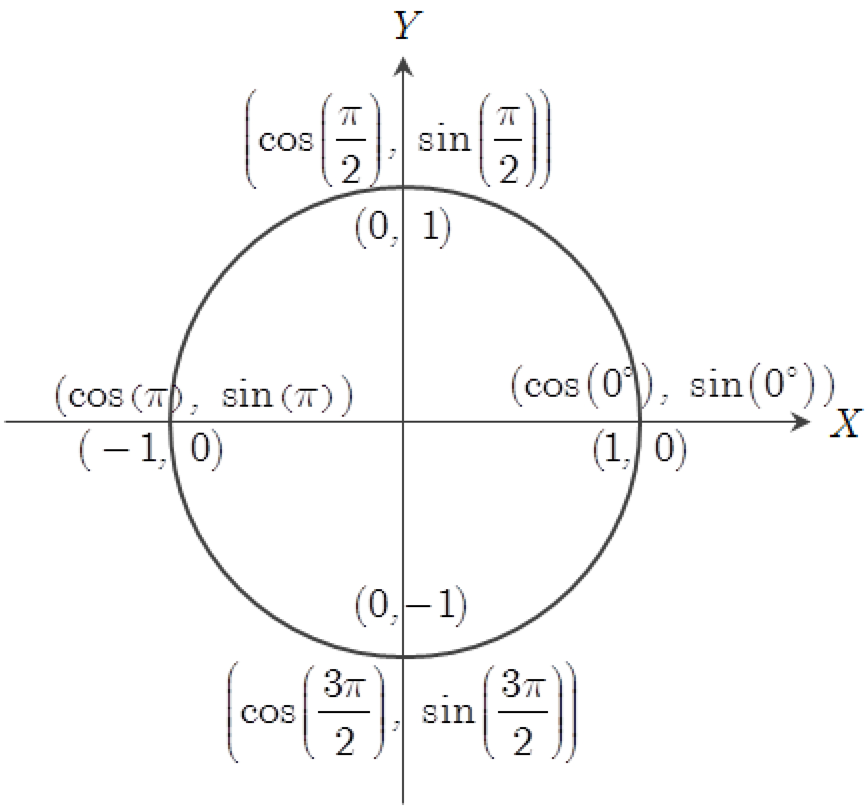
จึงทำให้ได้ว่า แกน $Y = \sin(\theta)$ และ แกน $X = \cos(\theta)$

เนื่องจาก $(x,\ y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ทำให้สามารถสรุปได้ว่า x คือค่า $\cos(\theta)$ และ y คือค่า $\sin(\theta)$ โดยให้พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูปต่อไปนี้



ภาพที่ 4.3 วงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ในที่นี้จะนำความรู้เกี่ยวกับ วงกลมหนึ่งหน่วย มาหาค่าของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ ณ จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทราบพิกัด



ภาพที่ 4.4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

จากภาพที่ 4.4 สามารถสรุปค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้ดังตารางต่อไปนี้

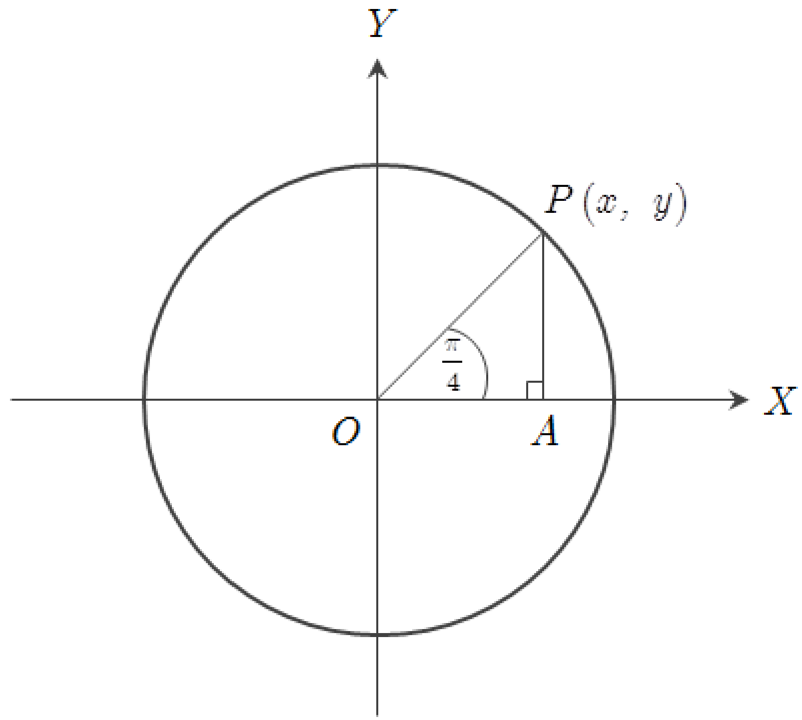
มุม / ฟังก์ชัน	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	$\pi(180^\circ)$	$\frac{3\pi}{2}(270^\circ)$
$\sin\theta$	0	1	0	-1
$\cos\theta$	1	0	-1	0

นอกจากมุม 0°, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ แล้ว ยังมีจำนวนจริงที่น่าสนใจ คือ $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$

พิจารณาค่า $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ให้ $P\,(x,\ y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิด

สร้างรูป ΔPAO โดยมี A เป็นมุมฉากและมุม $A\hat{O}P = \dfrac{\pi}{4}$

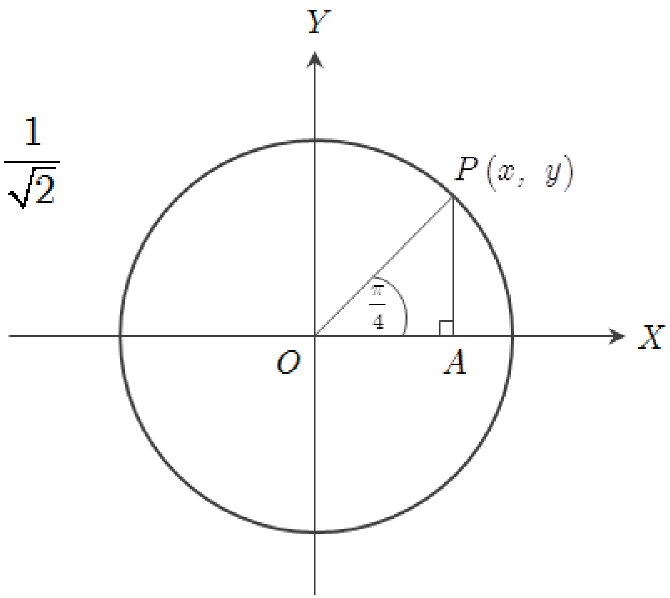


ภาพที่ 4.5 ค่าของฟังก์ชัน $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ และ $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

จากภาพที่ 4.5 จะได้ว่า ΔPAO เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ทำให้ได้ว่า $OA = PA$

จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} OA^2 + PA^2 &= OP^2 \\ x^2 + y^2 &= 1^2 \\ x^2 + x^2 &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



แต่เนื่องจาก x เป็นจุดใน Q_1 จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

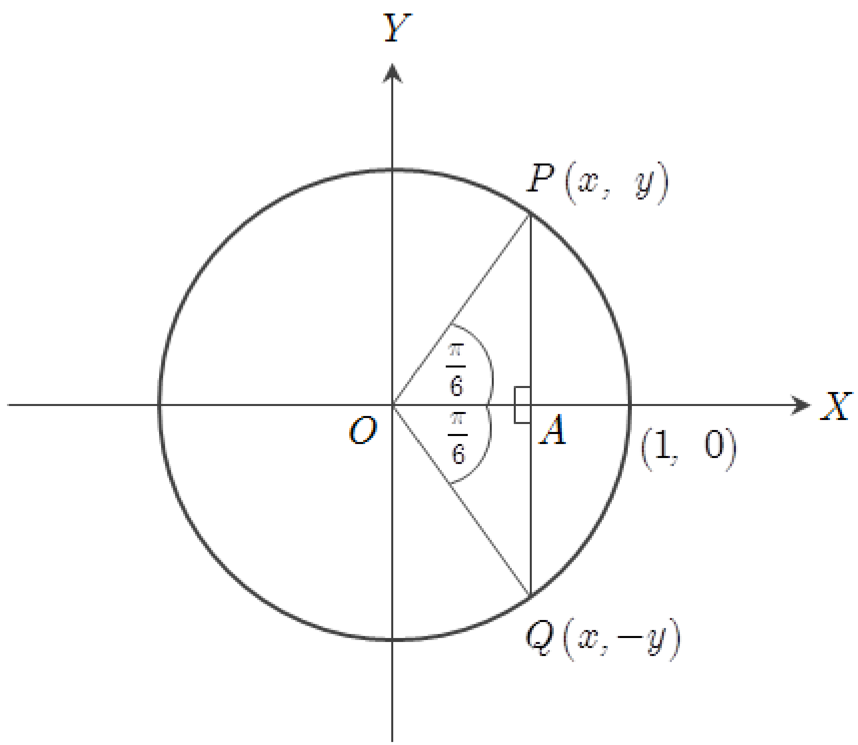
จะได้ จุด $P(x,\ y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ดังนั้น $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

พิจารณาค่า $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ให้ $P(x,\ y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิดและเป็นจุดบนเส้นรอบวงที่อยู่บนแกน X

ให้ $P(x,\ y)$ และ $Q(x,-y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดกำเนิด ดังรูป



สร้างรูป ΔPOA โดยมีมุม $P\hat{O}A = \frac{\pi}{6}$ และ ΔQOA มีมุม $Q\hat{O}A = \frac{\pi}{6}$ และทราบว่า $OP = OQ$ เพราะเป็นรัศมีของวงกลม ทำให้ได้ว่า ΔPOQ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเป็นหนึ่งหน่วย ลากเส้นตรง OA ตั้งฉาก PQ จะได้ $PA = \frac{1}{2}$ จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส ทำให้ได้ว่า

$$OA^2 + AP^2 = OP^2$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

แต่เนื่องจาก x เป็นจุดใน Q_1 จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

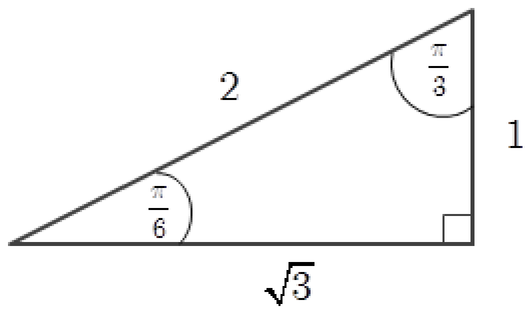
จะได้จุด $P(x,\ y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ดังนั้น $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

และจากการหาค่า $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ได้

สามารถนำไปสู่การหาค่า $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ได้เช่นกัน

พิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

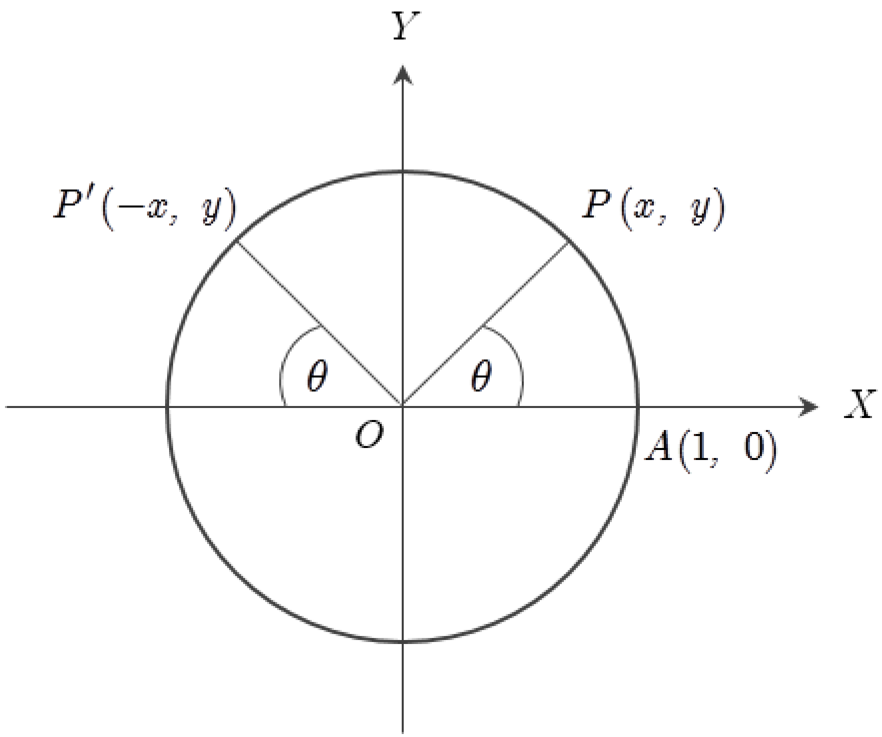


จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พบว่า $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ และทำให้ได้ว่า $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ นอกจากนี้แล้วยังทำให้ทราบค่าของฟังก์ชันอื่น ๆ ตามมาอีก จากความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$
$\sin(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{cosec}(\theta)$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec(\theta)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot(\theta)$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

จากความรู้เรื่องวงกลมหนึ่งหน่วย พิกัดตัวหน้าคือค่าโคไซน์ และพิกัดตัวหลังคือค่าไซน์ของมุม ดังกล่าว จึงได้ว่า $\cos(\pi - \theta) = -x = -\cos(\theta)$ และ $\sin(\pi - \theta) = y = \sin(\theta)$

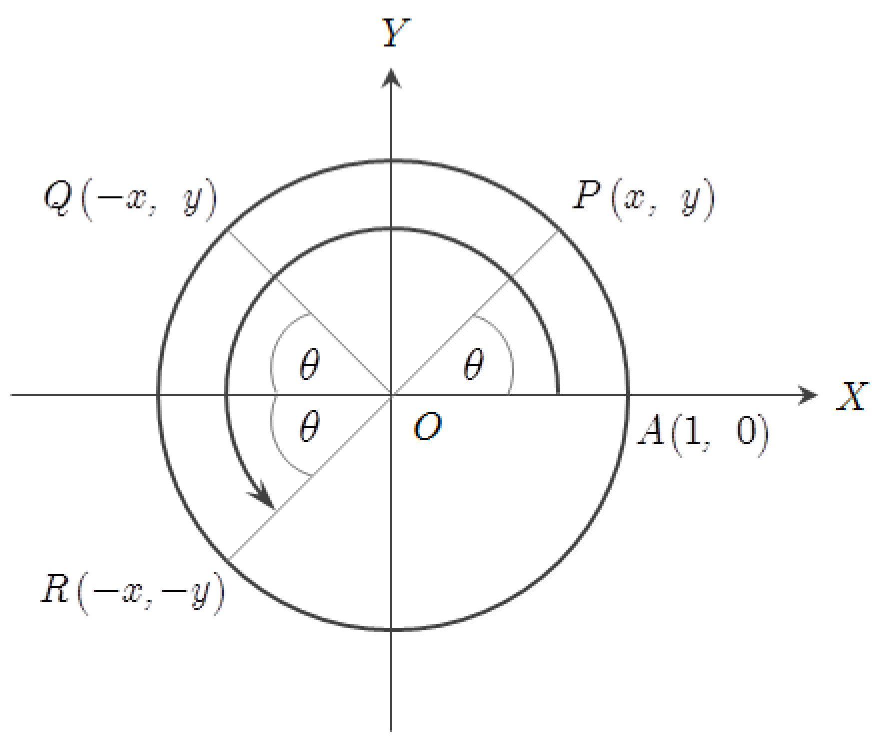
ดังนั้น $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ และ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ ดังรูป

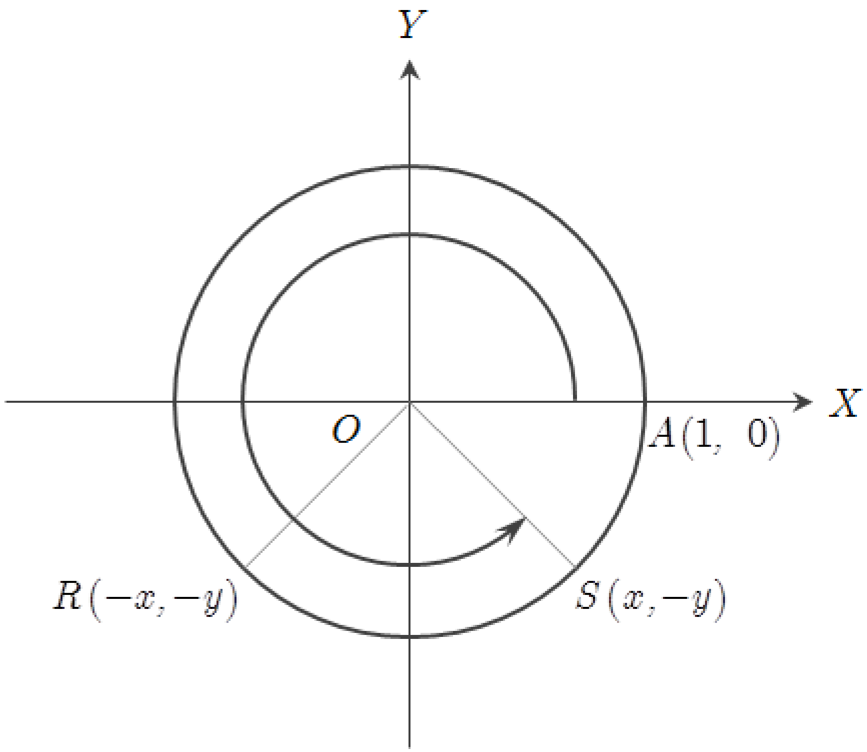


ภาพที่ 4.7 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\pi \pm \theta$ และ $2\pi \pm \theta$

ถ้ากำหนดให้แกน X เป็นแกนสมมาตร จะหาจุดสมมาตรกับจุด Q คือจุด $R(-x,-y)$ และขนาดของมุม $A\hat{O}R$ เท่ากับ $\pi+\theta$ เพราะว่า $R(-x,-y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้นจากความรู้เรื่องวงกลม จึงได้ $\cos(\pi+\theta)=-x=-\cos(\theta)$ และ $\sin(\pi+\theta)=-y=-\sin(\theta)$

ดังนั้น $\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$ และ $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$ ดังรูป



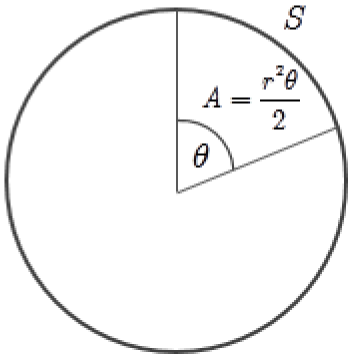


ถ้าใช้แกน Y เป็นแกนสมมาตร จะหาจุดสมมาตรกับจุด R จะได้ $S(x,-y)$ และขนาดของมุม $A\hat{O}S$ เท่ากับ $2\pi-\theta$ เพราะว่า $S(x,-y)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น จากความรู้เรื่องวงกลม จึงได้ว่า $\cos(2\pi-\theta)=x=\cos(\theta)$ และ $\sin(2\pi-\theta)=-y=-\sin(\theta)$

ดังนั้น $\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)$ และ $\sin(2\pi-\theta)=-\sin(\theta)$

4.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พิจารณาวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ และมีรัศมียาว r หน่วย ดังรูปต่อไปนี้

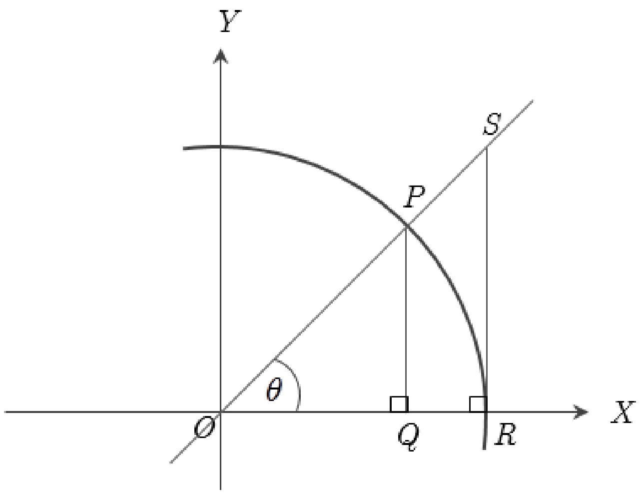


ภาพที่ 4.8 ความยาวของส่วนโค้งซึ่งรองรับมุม θ ที่จุดศูนย์กลาง

จากภาพที่ 4.8 กำหนดให้ S เป็นความยาวของส่วนโค้งซึ่งรองรับมุม θ ที่จุดศูนย์กลาง และให้ A เป็นพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งนี้ จะได้สัดส่วน $\frac{S}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$ ซึ่งทำให้ได้ $S = r\theta$ และ $A = \frac{r^2\theta}{2}$

ทฤษฎีบทที่ 4.1 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

พิสูจน์ พิจารณารูปต่อไปนี้



ภาพที่ 4.9 เปรียบเทียบการหาพื้นของรูปสามเหลี่ยม 3 รูป

จากภาพที่ 4.9 พบว่าพื้นที่ ΔPOQ $<$ พื้นที่ Δ ฐานโค้ง POR $<$ พื้นที่ ΔSOR โดยที่ $OR = OP = 1$ ทำให้ได้ว่าพื้นที่ $\Delta POQ = \frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta)$ พื้นที่ Δ ฐานโค้ง $POR = \frac{1}{2}\theta$ และพื้นที่ $\Delta SOR = \frac{1}{2}\tan(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

ดังนั้น $\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

จาก $\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

เมื่อ $\theta \to 0$

<u>กรณีที่ 1</u> $\theta \to 0^+$ จะได้ $\sin(\theta) > 0$ ดังนั้น

$$\frac{\cos(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2\sin(\theta)} < \frac{1}{2\cos(\theta)}$$

$$\cos(\theta) < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

หรือ $$\cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

จะได้ว่า $\lim_{\theta\to 0^+}\cos(\theta) \leq \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\cos(\theta)}$

$$1 \leq \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1$$

นั่นคือ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

<u>กรณีที่ 2</u> $\theta \to 0^-$ จะได้ $\sin(\theta) < 0$ ดังนั้น

$$\frac{\cos(\theta)}{2} < \frac{\theta}{2\sin(\theta)} < \frac{1}{2\cos(\theta)}$$

$$\cos(\theta) < \frac{\theta}{\sin(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

หรือ
$$\cos(\theta) < \frac{\sin(\theta)}{\theta} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \cos(\theta) \le \lim\limits_{\theta \to 0^-} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \le \lim\limits_{\theta \to 0^-} \frac{1}{\cos(\theta)}$

$$1 \le \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \le 1$$

นั่นคือ $\lim\limits_{\theta \to 0^-} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบทที่ 4.1 ไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 4.1 จงแสดงว่า $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta}=0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\theta}\cdot\frac{1+\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}\right)\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2(\theta)}{\theta(1+\cos(\theta))}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2(\theta)}{\theta(1+\cos(\theta))}\\
&= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}\right)\\
&= (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta}=0$ #

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะเป็นการพิสูจน์สูตรของอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ถ้าให้ $y = f(x) = \sin(x)$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x)$

พิสูจน์ จาก

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)-\sin(x)(1-\cos(h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(1-\cos(h))}{h} \\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos(h))}{h} \\
&= \cos(x)(1)-\sin(x)(0) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(u) &= \frac{d}{du}\sin(u)\frac{du}{dx} \\
&= \cos(u)\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{d}{dx}\sin(u) = \cos(u)\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบทที่ 4.3 $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

พิสูจน์ จาก $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos(x) &= \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ &= \sin(x)(0-1)\\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่

จะได้
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos(u) &= \frac{d}{du}\cos(u)\frac{du}{dx}\\ &= -\sin(u)\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบทที่ 4.4 $\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$

พิสูจน์ จาก $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\cos(x)\frac{d}{dx}\sin(x) - \sin(x)\frac{d}{dx}\cos(x)}{(\cos(x))^2}$$
$$= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่

จะได้
$$\frac{d}{dx}\tan(u) = \frac{d}{du}\tan(u)\frac{du}{dx}$$
$$= \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบทที่ 4.5 $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(x) = -\operatorname{cosec}(x)\cot(x)$

พิสูจน์ จาก $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) = \frac{d}{dx}(\sin(x))^{-1} \\ &= (-1)(\sin(x))^{-2}\frac{d}{dx}\sin(x) \\ &= -\frac{1}{\sin^2(x)}\cos(x) \\ &= -\frac{1}{\sin(x)}\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= -\operatorname{cosec}(x)\cot(x)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(x) = -\operatorname{cosec}(x)\cot(x)$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่

จะได้
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(u) &= \frac{d}{du}\operatorname{cosec}(u)\cdot\frac{du}{dx} \\ &= -\operatorname{cosec}(u)\cot(u)\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}(u) = -\operatorname{cosec}(u)\cot(u)\cdot\frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบทที่ 4.6 $\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$

พิสูจน์ จาก $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

นั่นคือ $$\frac{d}{dx}\sec(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos(x))^{-1} &= (-1)(\cos(x))^{-2}\frac{d}{dx}\cos(x) \\ &= -\frac{1}{\cos^2(x)}(-\sin(x)) \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่

จะได้ $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec(u) &= \frac{d}{du}\sec(u)\cdot\frac{du}{dx} \\ &= \sec(u)\tan(u)\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\sec(u) = \sec(u)\tan(u)\cdot\frac{du}{dx}$

ทฤษฎีบทที่ 4.7 $\frac{d}{dx}\cot(x) = -\text{cosec}^2(x)$

พิสูจน์ จาก $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cot(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) \\
&= \frac{\sin(x)\frac{d}{dx}\cos(x) - \cos(x)\frac{d}{dx}\sin(x)}{(\sin(x))^2} \\
&= \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-1}{\sin^2(x)} \\
&= -\text{cosec}^2(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\cot(x) = -\text{cosec}^2(x)$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cot(u) &= \frac{d}{du}\cot(u)\cdot\frac{du}{dx} \\
&= -\text{cosec}^2(u)\cdot\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\cot(u) = -\text{cosec}^2(u)\cdot\frac{du}{dx}$

ให้ u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยกฎลูกโซ่ สามารถสรุปสูตรเพื่อช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

1. $\frac{d}{dx}\sin(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\mathrm{cosec}(u) = -\mathrm{cosec}(u)\cot(u)\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sec(u) = \sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\cot(u) = -\mathrm{cosec}^2(u)\frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\tan(x)}{x^3}$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{x^3\frac{d}{dx}\tan(x) - \tan(x)\frac{d}{dx}x^3}{\left(x^3\right)^2}$$

$$= \frac{x^3\sec^2(x) - 3x^2\tan(x)}{x^6}$$

$$= \frac{x\sec^2(x) - 3\tan(x)}{x^4}$$

#

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดให้ $y = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$

จะได้
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sin(x))\frac{d}{dx}\cos(x) - \cos(x)\frac{d}{dx}(1+\sin(x))}{(1+\sin(x))^2}$$

$$= \frac{(1+\sin(x))(-\sin(x)) - \cos(x)(\cos(x))}{(1+\sin(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x)}{(1+\sin(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin(x) - (\sin^2(x) + \cos^2(x))}{(1+\sin(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin(x) - 1}{(1+\sin(x))^2}$$

$$= \frac{-(1+\sin(x))}{(1+\sin(x))^2}$$

$$= -\frac{1}{1+\sin(x)}$$ #

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนด $y = \operatorname{cosec}^3(3x^2+2)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosec}^3(3x^2+2)\right] \\
&= -3\operatorname{cosec}^2(3x^2+2)\frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosec}(3x^2+2)\right] \\
&= -3\operatorname{cosec}^2(3x^2+2)\operatorname{cosec}(3x^2+2)\cot(3x^2+2)\frac{d}{dx}(3x^2+2) \\
&= -3\operatorname{cosec}^2(3x^2+2)\operatorname{cosec}(3x^2+2)\cot(3x^2+2)(6x) \\
&= -18\operatorname{cosec}^3(3x^2+2)\cot(3x^2+2) \qquad \#
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 จงหา $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ เมื่อกำหนด $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{1+\tan(x)}$

วิธีทำ จาก $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{1+\tan(x)}$

$$f'(x) = \frac{(1+\tan(x))\frac{d}{dx}\sin(x)-\sin(x)\frac{d}{dx}(1+\tan(x))}{(1+\tan(x))^2}$$

$$= \frac{(1+\tan(x))\cos(x)-\sin(x)\left(\sec^2(x)\right)}{(1+\tan(x))^2}$$

$$= \frac{\cos(x)+\tan(x)\cos(x)-\sin(x)\sec^2(x)}{(1+\tan(x))^2}$$

$$= \frac{\cos(x)+\sin(x)-\tan(x)\sec(x)}{(1+\tan(x))^2}$$

ดังนั้น $$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-(1)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{(1+1)^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = 0 \qquad \#$$

4.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ถ้า $y = \arcsin(x)$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ เมื่อ $x \in (-1, 1)$

ทฤษฎีบทที่ 4.9 ถ้า $y = \arccos(x)$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ทฤษฎีบทที่ 4.10 ถ้า $y = \arctan(x)$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

ให้ u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\arcsin(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d}{dx}\arccos(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}\arctan(u) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccosec}(u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot}(u) = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.6 กำหนด $y = \dfrac{1}{\arcsin(x)}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\arcsin(x)} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\arcsin(x))^{-1} \\
&= -(\arcsin(x))^{-2}\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) \\
&= -\frac{1}{(\arcsin(x))^{-2}\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

#

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนด $f(x) = x\arctan(\sqrt{x})$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x\arctan(\sqrt{x})$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x\frac{d}{dx}(\arctan(\sqrt{x})) + \arctan(\sqrt{x})\frac{dx}{dx} \\
&= x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \arctan(\sqrt{x}) \\
&= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \arctan(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

#

ตัวอย่างที่ 4.8 กำหนด $y = \operatorname{arccos}(x^3)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arccos}(x^3) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccos}(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \end{aligned}$$

#

ตัวอย่างที่ 4.9 กำหนด $f(x) = x^2\operatorname{arccot}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \operatorname{arccot}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2\left(-\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) + 2x\cdot\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{2x^2}{4+x^2}\right) + 2x\cdot\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

#

4.4 อนุพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

บทนิยามที่ 4.1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ข้อสังเกต 1. ค่า $e \approx 2.71828\ldots$

2. $\log_{10}x$ อาจเขียนแทนด้วย $\log x$ หรือ $\log_e x$ อาจเขียนแทนด้วย $\ln x$

ทฤษฎีบทที่ 4.11 ถ้า $x > 0$ และ $y = \ln x$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

ทฤษฎีบทที่ 4.12 ถ้า $y = \ln|x|$ และ $|x| \neq 0$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

ทฤษฎีบทที่ 4.13 ถ้า $y = e^x$ แล้ว $\dfrac{dy}{dx} = e^x$

ทฤษฎีบทที่ 4.14 ถ้า $y = \log|v|$, $v \neq 0$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$

ทฤษฎีบทที่ 4.15 ถ้า $y = a^x$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

ทฤษฎีบทที่ 4.16 ถ้า $y = \log_a x$ โดยที่ $a,\ x > 0$ และ $a \neq 1$ แล้ว $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ให้ u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}\ln|u| = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx} \quad , |u| \neq 0$
3. $\dfrac{d}{dx}\epsilon^{u} = \epsilon^{u}\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\log|u| = \dfrac{\log\epsilon}{u}\cdot\dfrac{du}{dx} \quad , u \neq 0$
5. $\dfrac{d}{dx}a^{u} = a^{u}\ln a\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\log_{a}u = \dfrac{1}{u\ln a}\dfrac{du}{dx} \quad a,\ u > 0$ และ $a \neq 1$

ตัวอย่างที่ 4.11 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \ln\left(5x^3 - 6\right)$ โดยที่ $5x^3 - 6 > 0$

วิธีทำ จาก $y = \ln\left(5x^3 - 6\right)$

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\ln\left(5x^3 - 6\right) \\
&= \frac{1}{5x^3 - 6} \cdot \frac{d}{dx}\left(5x^3 - 6\right) \\
&= \frac{1}{5x^3 - 6} \cdot \left(15x^2 - 0\right) \\
&= \frac{15x^2}{5x^3 - 6}
\end{aligned}$$

#

ตัวอย่างที่ 4.12 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

วิธีทำ จาก $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

$$
\begin{aligned}
\text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) \\
&= x^2 \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \frac{d}{dx} x^2 \\
&= x^2 e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} 2x \\
&= -e^{\frac{1}{x}} + 2xe^{\frac{1}{x}} \\
&= e^{\frac{1}{x}}(2x-1)
\end{aligned}
$$

#

ตัวอย่างที่ 4.13 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 5^{-6x} + xe^{x^3}$

วิธีทำ จาก $f(x) = 5^{-6x} + xe^{x^3}$

จะได้ $$f'(x) = 5^{-6x}(\ln 5)\frac{d}{dx}(-6x) + \left(x\frac{d}{dx}e^{x^3} + e^{x^3}\frac{dx}{dx}\right)$$

$$= (-6\ln 5)\left(5^{-6x}\right) + xe^{x^3}\frac{d}{dx}x^3 + e^{x^3}$$

$$= (-6\ln 5)\left(5^{-6x}\right) + 3x^3e^{x^3} + e^{x^3}$$

$$= (-6\ln 5)\left(5^{-6x}\right) + e^{x^3}\left(3x^3 + 1\right)$$ #

ตัวอย่างที่ 4.14 จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดให้ $y = \sqrt{x^e + e^x}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{x^e + e^x} = (x^e + e^x)^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^e+e^x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^e+e^x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^e+e^x)^{-\frac{1}{2}}\left(ex^{e-1}+e^x\right)$$

$$= \frac{ex^{e-1}+e^x}{2\sqrt{x^e+e^x}}$$ #

จบบทที่ 4