บทที่ 5
การประยุกต์อนุพันธ์

5.1 ทฤษฎีบทพื้นฐาน

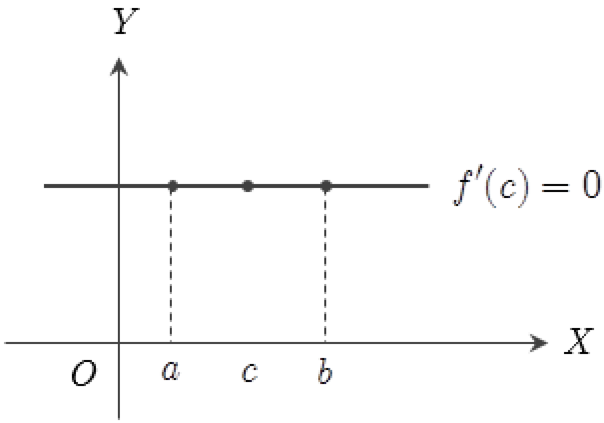
ก่อนที่จะศึกษาถึงประโยชน์ของอนุพันธ์ จะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานสำคัญที่เกี่ยวข้องเสียก่อน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 5.1 (ทฤษฎีบทของโรลล์ : Rolle's theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,\ b]$ และ $f'(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ $x \in (a,\ b)$ โดยที่ $f(a) = f(b)$ แล้วจะมีจำนวนจริง c อย่างน้อยหนึ่งค่าในช่วง $(a,\ b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

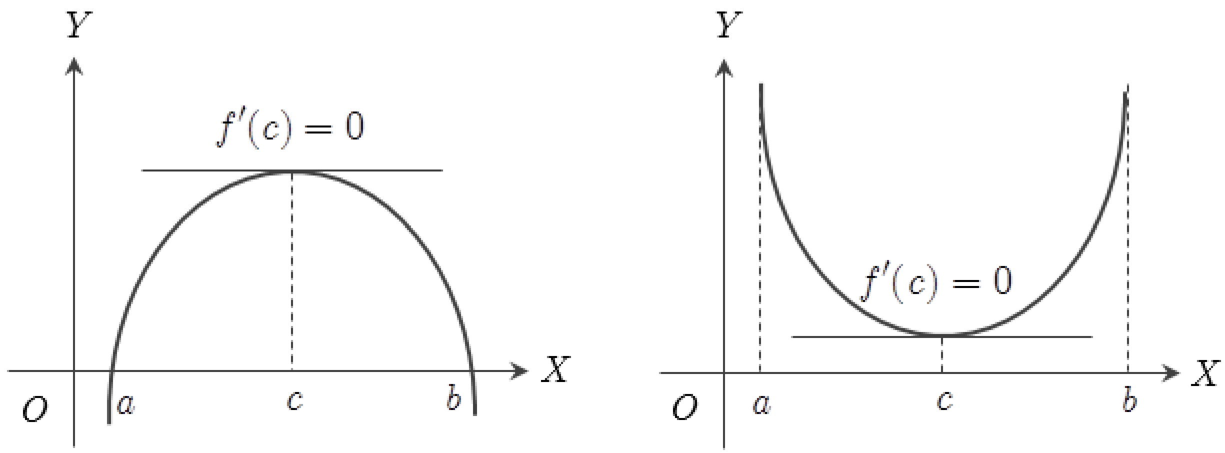
พิสูจน์ พิจารณาเป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว



ภาพที่ 5.1 กราฟของฟังก์ชันค่าคงตัว

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว



ภาพที่ 5.2 กราฟของฟังก์ชันไม่ใช่ค่าคงตัว

จากภาพที่ 5.2 สำหรับบนช่วง $[a,\ b]$ จะมีจุด $c\in(a,\ b)$ ซึ่งทำให้ $f(c)$ มีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดบนช่วง $[a,\ b]$ โดยค่าสูงสุดกับค่าต่ำสุดของ f ย่อมต่างกัน ค่าหนึ่งในสองค่านี้ย่อมต้องเป็นค่าของฟังก์ชันที่จุดในช่วง $(a,\ b)$ สมมติว่าที่ c ที่จุดนี้จะได้ว่า $f'(c)=0$

หมายเหตุ ความหมายทางเรขาคณิต คือ ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องตามทฤษฎีบทของโรลล์ แล้ว จะมีจำนวนจริง $c\in(a,\ b)$ ที่ทำให้เส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(c,\ f(c))$ ซึ่งขนานกับแกน X นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ จงตรวจสอบว่า f สอดคล้องตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์หรือไม่ บนช่วง $[0,\ 2]$ พร้อมทั้งหาค่า c ในช่วงที่ทำให้ $f'(c) = 0$

วิธีทำ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,\ \infty)$

นั่นคือ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(x)$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ $x \in (-\infty,\ \infty)$

เพราะว่า $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 2(0) = 0$

และ $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2(2) = 0$

นั่นคือ $f(0) = f(2)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,\ 2]$ และมีอนุพันธ์บนช่วง $(0,\ 2)$

ซึ่ง $f(0) = f(2)$ จะเห็นว่า f สอดคล้องกับทฤษฎีบทของโรลล์บนช่วง $[0,\ 2]$

หาค่า c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $3x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{3},\ \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น ในช่วง $[0,\ 2]$ ค่า c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ คือ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ หรือ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ #

ทฤษฎีบทที่ 5.2 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม : mean value theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,\ b]$ และ $f'(x)$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,\ b)$ แล้ว จะได้ว่ามีจำนวนจริง $c \in (a,\ b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนด $f(x) = x^3 - x$ ถ้าพิจารณาบนช่วง $[0,\ 2]$ จงหาจำนวนจริง $c \in (0,\ 2)$ ที่เป็นไปตามทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,\ 2]$ และ $f'(x)$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ $x \in (0,\ 2)$

ดังนั้น f สอดคล้องเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

$f'(x) = 3x^2 - 1$ และ $f'(c) = 3c^2 - 1$

โดยที่ $f(0) = 0^3 - 0 = 0$ และ $f(2) = 2^3 - 2 = 6$

จะได้ $$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 3$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 3c^2 - 1 &= 3 \\ c^2 &= \frac{4}{3} \\ c &= \frac{2\sqrt{3}}{3},\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0,\ 2)$ แต่ $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin (0,\ 2)$

ดังนั้น ค่า c ที่สอดคล้องตามทฤษฎีบทค่ามัชฌิม คือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ #

ตัวอย่างที่ 5.3 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & ; \ -2 \le x < 0 \\ 1-x^2 & ; \ \ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ จงตรวจสอบว่า f สอดคล้องตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมหรือไม่ พร้อมทั้งหาค่า c ที่สอดคล้องตามทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

วิธีทำ เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-2,\ 2]$

และ $f'(x)$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ $x \in (-2,\ 2)$

ดังนั้น $f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \ -2 < x < 0 \\ -2x & ; \ \ 0 < x < 2 \end{cases}$

และ $f'(c) = \begin{cases} 2c & ; \ -2 < c < 0 \\ -2c & ; \ \ 0 < c < 2 \end{cases}$

โดยที่ $f(-2) = 5$ และ $f(2) = -3$

จะได้ $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2-(-2)} = \dfrac{-3-5}{4} = -2$

ดังนั้น $2c = -2$ เมื่อ $-2 < c < 0$ และ $-2c = -2$ เมื่อ $0 < c < 2$

$c = -1$ และ $c = 1$

เนื่องจาก $-1 \in [-2,\ 2]$ และ $1 \in [-2,\ 2]$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ที่กำหนดสอดคล้องตามทฤษฎีบทค่ามัชฌิม และมีค่า c คือ -1 และ 1 #

บทนิยามที่ 5.1 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) บนช่วง $[a,\ b]$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$

บทนิยามที่ 5.2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลด (decreasing function) บนช่วง $[a,\ b]$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$

ทฤษฎีบทที่ 5.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,\ b]$ และ $f'(x)$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,\ b)$

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,\ b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a,\ b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,\ b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a,\ b]$
3. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,\ b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวบนช่วง $[a,\ b]$

ตัวอย่างที่ 5.4 กำหนด $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในช่วงใด

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

จะได้ว่า $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ เมื่อ

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6x - 12 &> 0 \\ x^2 + x - 2 &> 0 \\ (x-1)(x+2) &> 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $x < -2$ หรือ $x > 1$

โดยทฤษฎีบทที่ 5.3.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,\ 2) \cup (1,\ \infty)$

และพบว่า $f'(x) < 0$ เมื่อ $-2 < x < 1$

โดยทฤษฎีบทที่ 5.3.2 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-2,\ 1)$ #

ตัวอย่างที่ 5.5 กำหนด $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดในช่วงใด

วิธีทำ จาก $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

เพราะว่า $f'(x)=\frac{1}{2}\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

โดยทฤษฎีบทที่ 5.3.1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}>0$

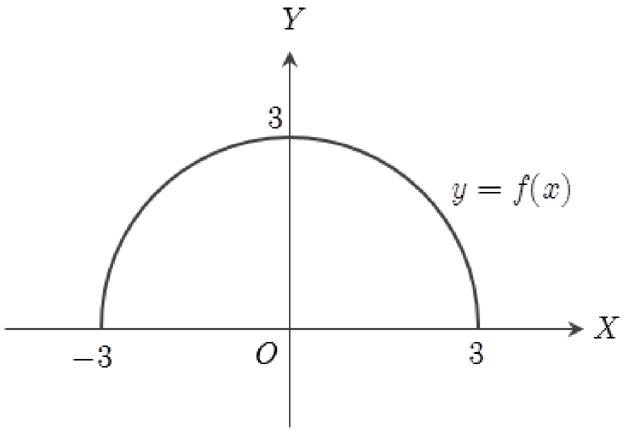
จะได้ว่า $x<0$ และ $(x+3)(x-3)<0$

ดังนั้น $-3<x<0$

และโดยทฤษฎีบทที่ 5.3.2 f เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}<0$

จะได้ว่า $x>0$ และ $(x+3)(x-3)<0$

ดังนั้น $0<x<3$ ดังรูป



#

5.2 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

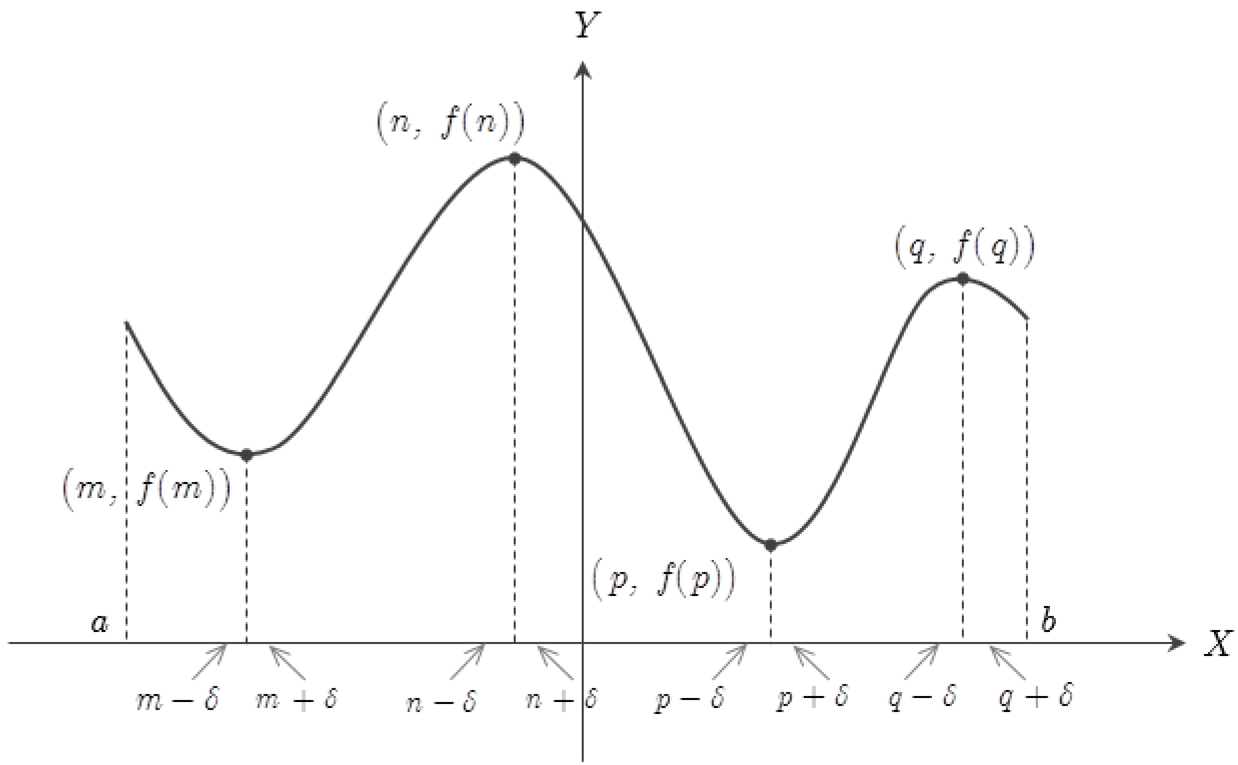
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคำว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าสุดขีดสัมพัทธ์ พร้อมทั้งวิธีการนำอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และอนุพันธ์อันดับที่สองไปประยุกต์ใช้ในการตรวจสอบค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ก่อนอื่นมาทราบบทนิยามที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามที่ 5.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนเซต S และ $c \in S$

1. จะเรียก $f(c)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum value) ของฟังก์ชัน f ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $f(c) > f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in (c-\delta,\ c+\delta)$ และเรียกจุด $(c,\ f(c))$ ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

2. จะเรียก $f(c)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum value) ของฟังก์ชัน f ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $f(c) < f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in (c-\delta,\ c+\delta)$ และเรียกจุด $(c,\ f(c))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

3. จะเรียก $f(c)$ ว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (extreme value) ของฟังก์ชัน f บนเซต S ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน S หรือ $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S



ภาพที่ 5.4 กราฟแสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

จากภาพที่ 5.4 ตามบทนิยามพบว่า f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $[a,\ b]$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(n), f(q)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(n,\ f(n)), (q,\ f(q))$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(m), f(p)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(m,\ f(m)), (p,\ f(p))$

ทฤษฎีบทที่ 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนช่วง $(a,\ b)$ ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c เมื่อ $c \in (a,\ b)$ และ $f'(c)$ มีค่า แล้ว $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนช่วง $(a,\ b)$ ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c เมื่อ $c \in (a,\ b)$ แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

บทนิยามที่ 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $(a,\ b) \subseteq D_f$ และ $c \in (a,\ b)$ จะเรียก c ว่า จุดวิกฤต (critical point) ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาจุดวิกฤตของ $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0,\ x = 1$ และ $x = 3$

เพราะฉะนั้น จุดวิกฤตของ f คือ $x = 0,\ x = 1$ และ $x = 3$ #

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาจุดวิกฤตของ $f(x)=x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ จาก $f(x)=x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$ เมื่อ $x\in[0,\ \infty)$

จะได้ว่า $f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ เมื่อ $x\in(0,\ \infty)$

$$=\frac{5x^2+6x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(x+1)(5x+1)}{2\sqrt{x}}$$

เพราะฉะนั้นไม่มี $x\in(0,\ \infty)$ ที่ทำให้ $f'(x)=0$ หรือหาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่มีจุดวิกฤต #

บทนิยามที่ 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าบนเซต S และ $c \in S$

1. จะเรียก $f(c)$ ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum value) ของ f บน S ถ้า $f(c) > f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ และจะเรียกจุด $(c,\ f(c))$ ว่าจุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f
2. จะเรียก $f(c)$ ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum value) ของ f บน S ถ้า $f(c) < f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ และจะเรียกจุด $(c,\ f(c))$ ว่าจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f

ทฤษฎีบทที่ 5.6 ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $(a,\ b)$ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f เมื่อ $c \in (a,\ b)$ สมมติให้ว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $(c-\delta,\ c+\delta) \subseteq (a,\ b)$ และ $f'(x)$ โดยมีค่าบนช่วง $(c-\delta,\ c) \cup (c,\ c+\delta)$

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (c-\delta,\ c)$ และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (c,\ c+\delta)$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง $(a,\ b)$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (c-\delta,\ c)$ และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (c,\ c+\delta)$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บนช่วง $(a,\ b)$

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)=(5-x)x^{\frac{1}{4}}$

วิธีทำ จาก $f(x) = (5-x)x^{\frac{1}{4}} = 5x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{5}{4}}$

จะได้ $f'(x) = \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$

$$= \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}}(1-x)$$

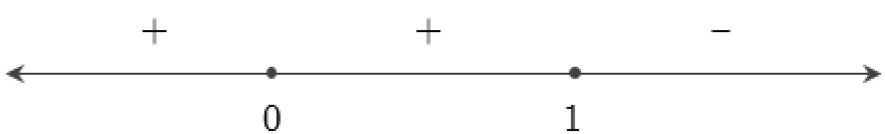
$$= -\frac{5}{4}\left(\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$$

เพราะฉะนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$

และ $f'(x)$ ไม่มีค่า เมื่อ $x=0$

เพราะฉะนั้น จุดวิกฤตของ f คือ 0 และ 1

พิจารณาเครื่องหมายของ $f'(x)$ จากเส้นจำนวนจริง



จากเส้นจำนวนจริงจะได้ว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $f(1) = 4$ และ f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ทฤษฎีบทที่ 5.7 ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง $(a,\ b)$ และ $c \in (a,\ b)$ โดยที่ $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ มีค่า

1. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่างที่ 5.10 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + \dfrac{45}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 45x^{-\frac{1}{2}}$ เมื่อ $x \in (0, \infty)$

จะได้ $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{45}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ เมื่อ $x \in (0, \infty)$

$$= \frac{3(x+3)(x-5)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

เพราะว่าโดเมนของ $f'(x)$ คือช่วง $(0, \infty)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 5$

เพราะฉะนั้นจุดวิกฤตของ f มีเพียงจุดเดียว คือ 5

และจาก $f''(x) = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{135}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

จะได้ $f''(5) = \dfrac{3}{4\sqrt{5}} + \dfrac{3}{10\sqrt{5}} + \dfrac{135}{100\sqrt{5}} = \dfrac{12}{5\sqrt{5}} > 0$

เพราะฉะนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 5$ และมีค่าเท่ากับ $f(5) = 8\sqrt{5}$ #

5.3 การนำค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดไปใช้

ในที่นี้สามารถนำความรู้เรื่อง ค่าสุดขีดไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ โดยจะทำการสร้างฟังก์ชันจากปัญหาเหล่านั้นก่อน เพื่อให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ โดยมีขั้นตอนในการแก้ปัญหาของโจทย์ประยุกต์ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดดังนี้

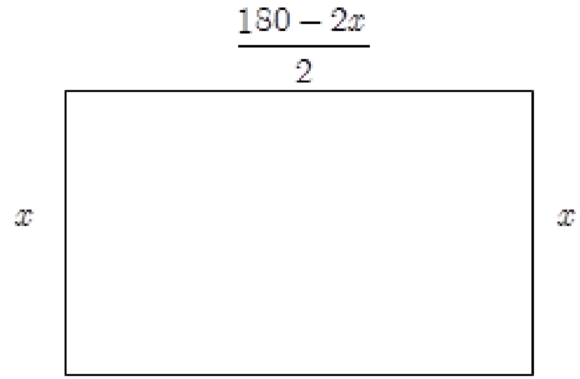
1. วิเคราะห์โจทย์แล้วจับประเด็นให้ได้ว่าโจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของปริมาณใด
2. สมมติสิ่งที่โจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดเป็นตัวแปร
3. สร้างฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยกำหนด x เป็นอีกตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับ y ซึ่งบางครั้ง x อาจจะเป็นตัวแปรที่โจทย์ถามหาที่มีความสัมพันธ์กับ y
4. ดำเนินการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ y โดย $f'(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 5.11 นายณภัทรมีเชือกยาว 180 เมตร เขาต้องการนำเชือกมาล้อมเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก นายณภัทรจะล้อมอย่างไร เพื่อให้ได้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้มากที่สุด

วิธีทำ ให้ A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ $90 - x$



นั่นคือ $A = x(90 - x)$

$A = 90x - x^2$

ต้องการล้อมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้ได้พื้นที่มากที่สุด เมื่อ $A'(x) = 0$

นั่นคือ $90 - 2x = 0$

$$x = \frac{90}{2} = 45$$

แสดงว่านายณภัทรจะต้องล้อมเชือกรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีความกว้าง 45 เมตร และยาว 45 เมตร เพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุด #

ตัวอย่างที่ 5.12 บริษัทผลิตรถจักรยานแห่งหนึ่ง ผลิตออกจำหน่ายในราคาคันละ 1,340 บาท ต้นทุนการผลิตจักรยาน x คัน โดยกำหนดฟังก์ชัน ดังนี้ $C(x)=\frac{5}{6}x^3-50x^2+1,700x+3,000$ จงหาว่าบริษัทควรผลิตจักรยานออกจำหน่ายจำนวนกี่คัน จึงจะได้กำไรมากที่สุด

วิธีทำ ให้ R เป็นฟังก์ชันของรายรับบริษัทในการผลิตจักรยาน x คัน นั่นคือ $R(x)=1,340x$

P แทนฟังก์ชันกำไรของบริษัท

ดังนั้น
$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)-C(x) \\ &= 1,340x-\left(\frac{5}{6}x^3-50x^2+1,700x+3,000\right) \\ &= -\frac{5}{6}x^3+50x^2-360x-3,000 \end{aligned}$$

ต้องการกำไรมากที่สุด เมื่อ $P'(x)=0$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}x^2+100x-360 &= 0 \\ -\frac{5}{2}(x-36)(x-4) &= 0 \\ x &= 4\ ,\ 36 \end{aligned}$$

ฉะนั้นจุดวิกฤตของ P คือ 4, 36 และจุดทั้งหมดที่อาจจะให้ค่าสูงสุดของ P คือ 0, 4, 36

เพราะว่า $P(0)=-3,000$, $P(4)=-3,693$ และ $P(36)=9,980$

ดังนั้น บริษัทควรผลิตจักรยานจำนวน 36 คัน จึงจะได้กำไรมากที่สุด #

ตัวอย่างที่ 5.13 จงหาความสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกที่มีปริมาตรมากที่สุด ที่จะบรรจุในกรวยกลม ซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 เซนติเมตร และสูง 30 เซนติเมตร โดยที่ฐานของรูปทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอกที่บรรจุในกรวยกลม

h แทนความสูงของรูปทรงกระบอก

V แทนปริมาตรของทรงกระบอก

ซึ่ง $V(r) = \pi r^2 h$ โดยจัดรูปตัวแปร h ให้อยู่ในรูปของ r ดังนี้

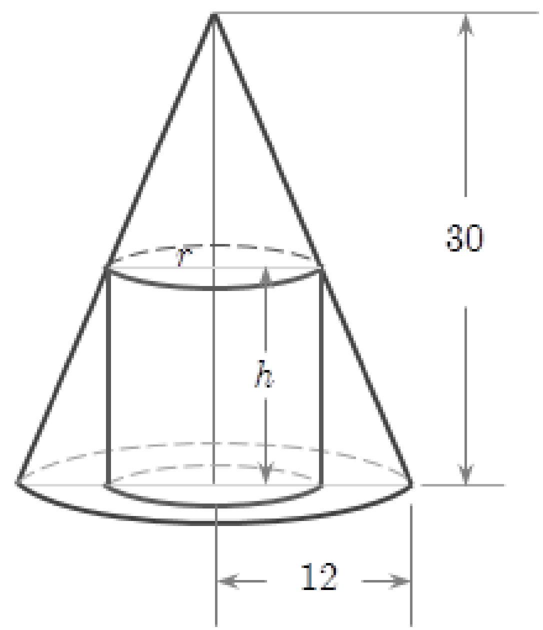
$$\frac{r}{12} = \frac{30-h}{30}$$

$$h = 30 - \frac{5r}{2}$$

ได้ $$V(r) = \pi r^2\left(30 - \frac{5r}{2}\right) \quad , \quad 0 \le r \le 12$$

$$= 30\pi r^2 - \frac{5}{2}r^3$$

$$V'(r) = 60\pi r - \frac{15}{2}\pi r^2$$



ให้ $V'(r) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 60\pi r - \frac{15}{2}\pi r^2 &= 0 \\ 8\pi r - \pi r^2 &= 0 \\ \pi r(8 - r) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $r = 0$ หรือ $r = 8$

พิจารณา $V(0)$, $V(8)$ และ $V(12)$

เพราะว่า $V(x) = 30\pi r^2 - \frac{5}{2}r^3$

จะได้

$$\begin{aligned} V(0) &= 30\pi(0)^2 - \frac{5}{2}(0)^3 = 0 \\ V(8) &= 30\pi(8)^2 - \frac{5}{2}(8)^3 = 640\pi \\ V(12) &= 30\pi(12)^2 - \frac{5}{2}(12)^3 = 0 \end{aligned}$$

ได้ $V(8)$ มีปริมาตรมากที่สุดเท่ากับ 640π ลูกบาศก์เซนติเมตร

เมื่อ $r = 8$ จะได้ $h = 30 - \frac{5(8)}{2} = 10$

นั่นคือ ทรงกระบอกที่มีปริมาตรมากที่สุด จะมีรัศมียาว 8 เซนติเมตร ความสูง 10 เซนติเมตร และปริมาตรมากที่สุดเท่ากับ 640π ลูกบาศก์เซนติเมตร #

5.4 กฎของโลปิตาลและรูปแบบไม่กำหนด

จาก $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ สามารถใช้เรขาคณิตช่วยในการหาค่า เมื่อพิจารณาลิมิตดังกล่าวพบว่าอยู่ในรูป $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ถ้า $x \to a$ แล้ว $f(x) \to 0$ และ $g(x) \to 0$ จะกล่าวว่า ลิมิตลักษณะเช่นนี้ว่า รูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

กรณีข้างต้น ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตตอบคำถามได้ว่า ลิมิตมีค่าหรือไม่มีค่า ซึ่งหัวข้อนี้จะใช้กฎของโลปิตาลเพื่อช่วยหาคำตอบว่าลิมิตมีค่า หรือไม่มีค่าอย่างไร

รูปแบบไม่กำหนด โดยยังมีรูปแบบอื่น ๆ อีก เช่น $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ 0^0, 1^∞ หรือ ∞^0 เมื่อ $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to a$, $x \to -\infty$ หรือ $x \to \infty$

ทฤษฎีบทที่ 5.9 กฎของโลปิตาล (L'Hospital's rule) ในรูปแบบ $\dfrac{0}{0}$

ถ้ากำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง $(a,\ a+\delta)$ สำหรับบางค่า $\delta > 0$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ ซึ่ง $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (a,\ a+\delta)$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ หรือ $-\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

ทฤษฎีบทที่ 5.10 กฎของโลปิตาลในรูป $\dfrac{\infty}{\infty}$

ถ้ากำหนดให้ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (หรือ $-\infty$) และ $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$ (หรือ $-\infty$) และ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (หรือ ∞ หรือ $-\infty$) แล้ว $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ทฤษฎีบทยังเป็นจริง เมื่อ $x \to a^-$, $x \to a$, $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$

สำหรับการหาค่าลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$ โดยสามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกับการหาค่าลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ กล่าวคือ กฎของโลปิตาลในทฤษฎีบทที่ 5.10 ยังคงเป็นจริงอยู่หากเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขจากรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ เป็นรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{-\infty}{\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞ หรือ ∞^0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9-x^2}{3-x}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9-x^2}{3-x}$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 3}\left(9-x^2\right) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 3}(3-x) = 0$

ซึ่ง $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้

$$\lim_{x \to 3} \frac{9-x^2}{3-x} = \lim_{x \to 3} \frac{-2x}{-1} = \lim_{x \to 3} 2x = 6$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9-x^2}{3-x} = 6$ #

ตัวอย่างที่ 5.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin(x) - x)}{x^3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} (\sin(x) - x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin(x) - x)}{x^3}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x) - x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(\cos(x) - 1)}{3x^2}$$ ยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

โดยกฎของโลปิตาลอีกครั้ง จะได้

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos(x) - 1)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{6x}$$ ยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

และโดยกฎของโลปิตาลอีกครั้ง จะได้ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin(x)}{6x} = -\dfrac{1}{6}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin(x) - x)}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$ #

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ #

จบบทที่ 5