มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

ฟิสิกส์ 2 (Physics 2)

บทที่ 9
ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.วุฒิชัย ไชยภักษา

สาขาฟิสิกส์อุตสาหกรรม คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

- 9.1 สัจพจน์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ
- 9.2 การแปลงโลเร็นตซ์
- 9.3 การหดตัวของความยาว
- 9.4 การยืดของเวลา
- 9.5 โมเมนตัม

ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

ทฤษฎีสัมพัทธภาพและกลศาสตร์ควอนตัม ถือเป็นทฤษฎีที่สำคัญอย่างยิ่งทางฟิสิกส์ของคริสต์ศตวรรษที่ 20 เพราะช่วยอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ เกี่ยวกับอะตอมและฟิสิกส์นิวเคลียร์ได้ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิ (space) และเวลา สสาร พลังงาน ไฟฟ้าและแม่เหล็ก

ตัวอย่างที่ 9.1 ถ้าที่เวลา $t' = 4\times10^{-4}$ s ในกรอบอ้างอิง S' อนุภาคอยู่ที่จุด $x' = 10$ m , $y' = 4$ m , $z' = 6$ m จงหา x, y, z, t ในกรอบอ้างอิง S ถ้า

ก) $v = +500\ \text{m.s}^{-1}$

ข) $v = -500\ \text{m.s}^{-1}$

ค) $v = 2\times10^{8}\ \text{m.s}^{-1}$

วิธีทำ

จากสมการการแปลงกลับโลเร็นตซ์

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\ y = y'\ ,\ z = z'\ ,\ t = \frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ก)

$$x = \frac{10m+(500m.s^{-1})(4\times10^{-4}s)}{\sqrt{1-\frac{(500m.s^{-1})^2}{(3\times10^8m.s^{-1})^2}}}$$

$$\approx 10m+(500m.s^{-1})(4\times10^{-4}s)$$

$$= 10.2\ m$$

$$y = 4\ m$$

$$z = 6\ m$$

$$t = \frac{(4\times10^{-4}s)+\frac{(500m.s^{-1})(10m)}{(3\times10^8m.s^{-1})^2}}{\sqrt{1-\frac{(500m.s^{-1})^2}{(3\times10^8m.s^{-1})^2}}}$$

$$\approx 4\times10^{-4}s$$

ข)

$$x = \frac{10m-(500m.s^{-1})(4\times10^{-4}s)}{\sqrt{1-\frac{(500m.s^{-1})^2}{(3\times10^8m.s^{-1})^2}}}$$

$$\approx 10m-(500m.s^{-1})(4\times10^{-4}s)$$

$$= 9.8\ m$$

$$y = 4\ m$$

$$z = 6\ m$$

$$t = \frac{(4\times10^{-4}s)-\frac{(500m.s^{-1})(10m)}{(3\times10^8m.s^{-1})^2}}{\sqrt{1-\frac{(500m.s^{-1})^2}{(3\times10^8m.s^{-1})^2}}}$$

$$\approx 4\times10^{-4}s$$

ค)

$$x = \frac{10\text{m}+(2\times10^{8}\text{m.s}^{-1})(4\times10^{-4}\text{s})}{\sqrt{1-\frac{(2\times10^{8}\text{m.s}^{-1})^{2}}{(3\times10^{8}\text{m.s}^{-1})^{2}}}}$$

$$= \frac{8.001\times10^{4}\text{m}}{0.7454}$$

$$= 1.073\times10^{4}\ \text{m}$$

$$y = 4\ \text{m}$$

$$z = 6\ \text{m}$$

$$t = \frac{(4\times10^{-4}\text{s})+\frac{(2\times10^{8}\text{m.s}^{-1})(10\text{m})}{(3\times10^{8}\text{m.s}^{-1})^{2}}}{\sqrt{1-\frac{(2\times10^{8}\text{m.s}^{-1})^{2}}{(3\times10^{8}\text{m.s}^{-1})^{2}}}}$$

$$= \frac{4.00022\times10^{-4}\text{s}}{0.7454}$$

$$= 5.367\times10^{-4}\ \text{s}$$

ตัวอย่างที่ 9.2 ณ ที่เวลา $t = 10^{-3}$ s ในกรอบอ้างอิง S การระเบิดเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $x = 5$ km จงหาเวลาของเหตุการณ์เดียวกันสำหรับผู้สังเกตในกรอบอ้างอิง S' ถ้าผู้สังเกตพบเหตุการณ์เกิดที่ตำแหน่ง $x' = 35.354$ km

วิธีทำ จากสมการการแปลงโลเร็นตซ์

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$35.354\times10^3\,\text{m} = \frac{(5\times10^3\,\text{m}) - v(10^{-3}\,\text{s})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{(3\times10^8\,\text{m.s}^{-1})^2}}}$$

หรือ

$$1.2499\times10^{15}(\text{m.s}^{-1})^2\left[1 - \frac{v^2}{(3\times10^8\,\text{m.s}^{-1})^2}\right] = 2.5\times10^{13}(\text{m.s}^{-1})^2 - (1.0\times10^7\,\text{m.s}^{-1})v + v^2$$ จะได้

อัตราเร็ว

$$v = -3\times10^7\ \text{m.s}^{-1}$$

จากสมการ

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{10^{-3}\text{s} + \dfrac{(3\times10^{7}\,\text{m.s}^{-1})(5\times10^{3}\,\text{m})}{(3\times10^{8}\,\text{m.s}^{-1})^{2}}}{\sqrt{1-\dfrac{(3\times10^{7}\,\text{m.s}^{-1})^{2}}{(3\times10^{8}\,\text{m.s}^{-1})^{2}}}}$$

$$= \frac{1.00167\times10^{-3}\ \text{s}}{0.99499}$$

$$= 1.0067\times10^{-3}\ \text{s}$$

จงหาอัตราเร็วของอนุภาคที่จะทำให้มวลของอนุภาคเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของมวลนิ่ง

วิธีทำ

จากสมการ $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2}$$

ดังนั้นอัตราเร็วของอนุภาค

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}}$$

$$= (3\times 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}$$

$$= 2.598\times 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

9.2 การแปลงโลเร็นตซ์

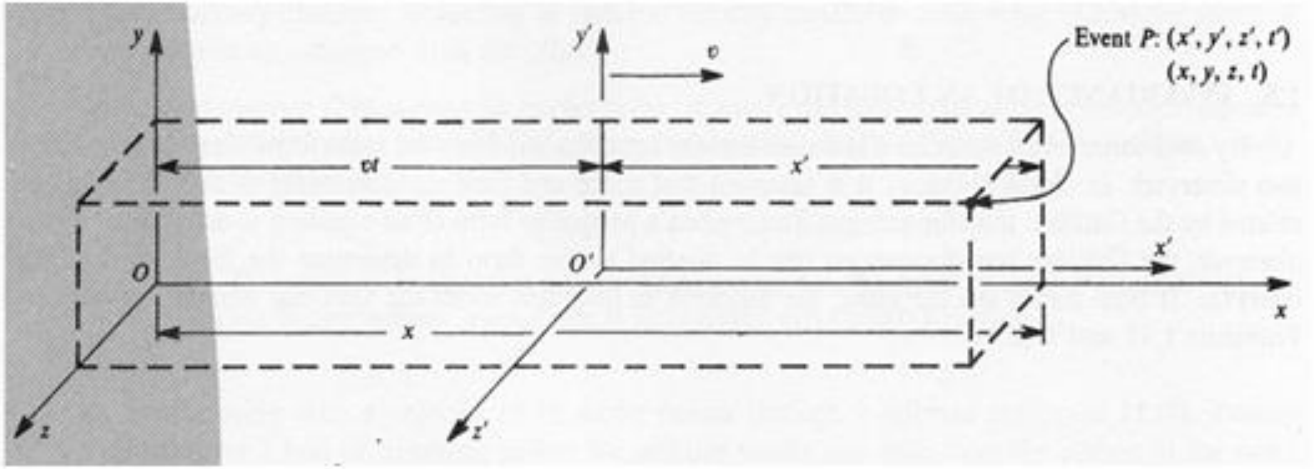
จากภาพที่ 9.1 พิจารณาเหตุการณ์ทางฟิสิกส์ โดยมีตำแหน่งของเหตุการณ์อยู่ที่จุด P เหตุการณ์เกิดขึ้นที่เวลา t มีโคออร์ดิเนต (x, y, z) อยู่ในกรอบอ้างอิง S สมมติว่าผู้สังเกตอยู่ที่กรอบอ้างอิง S' กำลังเคลื่อนที่ไปในทิศทาง +x ด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิง S ผู้สังเกตพบว่าเหตุการณ์เดียวกันนี้เกิดที่เวลา t' มีโคออร์ดิเนต (x', y', z') ความสัมพันธ์ระหว่างโคออร์ดิเนต x, y, z, t และ x', y', z', t' พิจารณาได้โดยอาศัยสัจพจน์ของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ดังต่อไปนี้

ณ ที่เวลา t = t' = 0 กรอบอ้างอิง S และ S' อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน แต่สำหรับที่เวลา $t \neq 0$ โดยอาศัยกลศาสตร์แบบฉบับ (classical mechanics) จะเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$x = x' + vt' \,,\; y = y' \,,\; z = z' \qquad (9.1)$$

หรือ

$$x' = x - vt \,,\; y' = y \,,\; z' = z$$



ภาพที่ 9.1 กรอบอ้างอิง S' เคลื่อนที่ไปในทิศทาง +x ด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับกรอบอ้างอิง S กรอบอ้างอิงทั้งสองอยู่ที่จุดเดียวกันที่เวลา t = t' = 0
ที่มา (Gautreau and Savin, 1999)

การแปลงโลเร็นตซ์

สมการ (9.1) เรียกว่าการแปลงกาลิเลียน (Galilean transformation)

แต่สำหรับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เขียนแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้เป็น

$$x' = k(x - vt) \qquad (9.2)$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวสำหรับความเร็วสัมพัทธ์ v

จากสัจพจน์ I สมการการเคลื่อนที่ของเหตุการณ์ในกรอบอ้างอิง S และ S' จะต้องมีรูปแบบทางคณิตศาสตร์เดียวกัน สมการ (9.1) จึงเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ว่า

$$x = k(x' + vt') \;,\; y = y' \;,\; z = z' \qquad (9.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.9)$$

$$y' = y \qquad (9.10)$$

$$z' = z \qquad (9.11)$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}{\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \right] x$$

$$= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.12)$$

สมการ (9.9), (9.10), (9.11) และสมการ (9.12) เรียกว่าสมการการแปลงโลเร็นตซ์ (Lorentz transformation equation) หรือเรียกสั้นๆ ว่าการแปลงโลเร็นตซ์ (Lorentz transformation) เพื่อเป็นเกียรติแก่เฮนดริก อันโตน โลเร็นตซ์ (Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928) นักวิทยาศาสตร์ชาวฮอลันดา

การแปลงโลเร็นตซ์

การแปลงโลเร็นตซ์ยังสามารถนำไปใช้แปลงระหว่างความเร็ว $\vec{v}' = \vec{v}'_x + \vec{v}'_y + \vec{v}'_z$ ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ในกรอบอ้างอิง S' และความเร็ว $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z$ ในกรอบอ้างอิง S ได้ดังนี้

พิจารณาความเร็วองค์ประกอบตามแนวแกน y

$$
\begin{aligned}
v'_y &= \frac{y'}{t'} \\
&= \frac{y}{\dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}} \\
&= \frac{y\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{t - \dfrac{vx}{c^2}} \\
&= \frac{v_y\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{vv_x}{c^2}}
\end{aligned}
$$

$$v'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}, \; v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}, \; v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} \qquad (9.22)$$

ทำนองเดียวกันจะเขียนได้ว่าความเร็วองค์ประกอบ

$$u_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}, \; u_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}, \; u_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} \qquad (9.23)$$

ตัวอย่างที่ 9.4 จงหาความเร็วองค์ประกอบในกรอบอ้างอิง S ของอิเล็กตรอนความเร็ว $\vec{v}'$ ในกรอบอ้างอิง S′ มีองค์ประกอบเป็น $v'_x = 6\times10^7 \text{m.s}^{-1}$, $v'_y = 4\times10^7 \text{m.s}^{-1}$ และ $v'_z = 3\times10^7 \text{m.s}^{-1}$ เมื่อ $v = 2\times10^8 \text{m.s}^{-1}$

วิธีทำ

จากสมการ (9.23)

$$u_x = \frac{v'_x + v}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}$$

$$= \frac{(6\times10^7 \text{ m.s}^{-1}) + (2\times10^8 \text{ m.s}^{-1})}{1+\frac{(2\times10^8 \text{ m.s}^{-1})(6\times10^7 \text{ m.s}^{-1})}{(3\times10^8 \text{ m.s}^{-1})^2}} = 2.294\times10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$u_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}$$

$$= \frac{(4\times10^7\ \mathrm{m.s^{-1}})\sqrt{1-\dfrac{(2\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}{(3\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}}}{1+\dfrac{(2\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})(6\times10^7\ \mathrm{m.s^{-1}})}{(3\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}} = 2.631\times10^7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

$$u_z = \frac{(3\times10^7\ \mathrm{m.s^{-1}})\sqrt{1-\dfrac{(2\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}{(3\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}}}{1+\dfrac{(2\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})(6\times10^7\ \mathrm{m.s^{-1}})}{(3\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}})^2}}$$

$$= 1.973\times10^7\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

จะได้ขนาดของความเร็ว

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$= \sqrt{5.371\times10^8\ \mathrm{m^2.s^{-2}}}$$

$$= 2.317\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

9.3 การหดตัวของความยาว

จากภาพที่ 9.1 สมมติว่าวัตถุมีความยาว L และ L' ในกรอบอ้างอิง S และ S' ตามลำดับ ความสัมพันธ์ระหว่างความยาว L และ L' สามารถพิจารณาได้จากหลักการการแปลงกลับโลเร็นตซ์ กำหนดให้ (x_1,x_2) และ (x_1',x_2') เป็นโคออร์ดิเนตของจุดปลายของวัตถุในกรอบอ้างอิง S และ S' ตามลำดับ โดยที่ความยาว

$$L = x_2 - x_1 \tag{9.24}$$

และ

$$L' = x_2' - x_1' \tag{9.25}$$

จากสมการ (9.13)

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

และ

$$x_2 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ดังนั้นความยาว

$$
\begin{aligned}
L &= x_2 - x_1 \\
&= \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

หรือ

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (9.26)$$

เนื่องจาก $1 - \frac{v^2}{c^2} < 1$ ดังนั้น $L' < L$ สมการ (9.26) จึงแสดงให้เห็นถึงการหดตัวของความยาว (contraction of length) หรือที่นิยมเรียกว่าการหดตัวแบบโลเร็นตซ์ ฟิตซ์ เจอรัลด์ (Lorentz Fitz Gerald contraction) นั่นคือ วัตถุเคลื่อนที่จะมีความยาวน้อยกว่าความยาวของวัตถุหยุดนิ่งเทียบกับผู้สังเกต

9.4 การยืดของเวลา

ถ้าเวลา $T = t_2 - t_1$ และ $T' = t'_2 - t'_1$ เป็นช่วงเวลาของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในกรอบอ้างอิง S และ S′ ตามลำดับ ความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลา T และ T′ พิจารณาหาได้จากการแปลงกลับโลเร็นตซ์ นั่นคือจากสมการ (9.16)

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.27)$$

และ

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.28)$$

ช่วงเวลา $T = t_2 - t_1$

$$= \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

เพราะฉะนั้นช่วงเวลาในกรอบอ้างอิง S

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.29)$$

เนื่องจาก $1 - \frac{v^2}{c^2} < 1$ ดังนั้นช่วงเวลา $T' < T$ สมการ (9.29) แสดงให้เห็นถึงการยืดของเวลา (time dilation) กล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าช่วงเวลาของเหตุการณ์ในกรอบอ้างอิงเคลื่อนที่จะสั้นกว่า (วัดช่วงเวลาได้น้อยกว่า) ช่วงเวลาของเหตุการณ์เดียวกันในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง

โมเมนตัม

โมเมนตัม P ของวัตถุมวล m กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ตามทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ได้ว่า

$$P = mv$$

$$= \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.31)$$

เมื่อ m เป็นมวลสัมพัทธ์

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน แรงกระทำต่ออนุภาคมีขนาดเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมต่อหน่วยเวลา

จากสมการ (9.31) และสมการ (9.32) จะเขียนได้ว่า

$$F = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}\frac{d}{dt}(m_0 v) - m_0 v\frac{d}{dt}(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \left[\frac{m_0(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2} - (m_0 v)(1/2)(-\frac{2v}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]\frac{dv}{dt}$$

$$= \left[\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}} + \frac{v^2/c^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\right] m_0\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

นั่นคือความเร่ง

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$= \frac{F}{m_0}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2} \qquad (9.33)$$

สมการ (9.33) แสดงให้เห็นว่าอัตราเร็วของอนุภาคที่เพิ่มขึ้น ความเร่งของแรงอนุรักษ์จะมีขนาดลดลง และเมื่ออัตราเร็วของอนุภาคเข้าใกล้อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ c ความเร่งจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือ โดยทฤษฎีไม่ว่าแรงจะมีขนาดเท่าไรก็ตาม เราไม่สามารถเร่งอนุภาคจากหยุดนิ่งจนกระทั่งอนุภาคมีอัตราเร็วเท่ากับ c หรือมากกว่า c ได้

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม