

NPRU

WEBMAIL

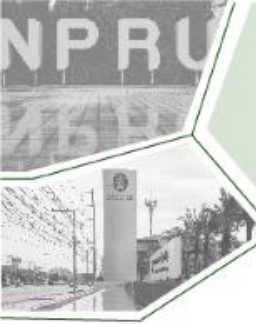


ตรรกศาสตร์และเทคนิคการพิสูจน์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์สมเกียรติ ช่อเหมือน (tko@webmail.npru.ac.th)

สาขาวิชาวิศวกรรมซอฟต์แวร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

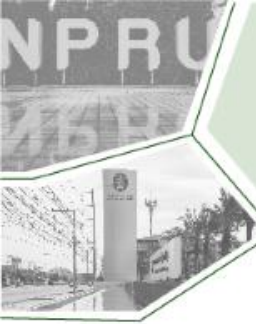




เนื้อหาการเรียนรู้

- ประพจน์
- การแจกแจงค่าความจริง
- การเชื่อมประพจน์
- การเท่ากันของประพจน์
- การสมมูลของประพจน์
- สัจนิรันดร์
- การอ้างเหตุผล
- ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ





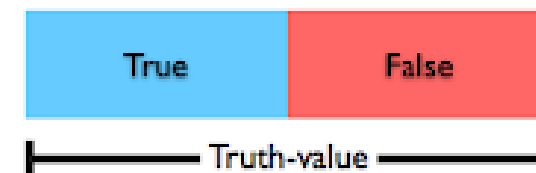
ตรรกศาสตร์ (Logic)

- การหาเหตุและผลด้วยวิธีการต่างๆ อย่างมีรูปแบบและระบบที่ชัดเจน
- การพิสูจน์จากข้อเท็จจริงที่เกิดจริง
- การคิดหาเหตุผลถูกนำมาใช้ควบคุมการทำงานของคอมพิวเตอร์
- การจัดเก็บข้อมูลต่าง ๆ ด้วยเลขฐานสองในแต่ละบิต (bit) ข้อความ (string)
- การใช้ตัวเชื่อมทางตรรกะที่มีความยาวบิตเท่ากัน
- การนำมาใช้ค้นหาข้อมูลด้วยคำค้นหรือเชื่อมโยงคำ
- การออกแบบวงจรดิจิทัล

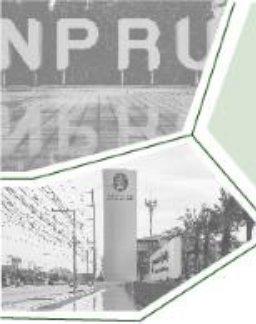


ประพจน์

- ประโยคที่มีค่าความจริง เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
- ประพจน์เปรียบเสมือนเงื่อนไขหรือสถานะในการตัดสินใจในการทำงาน
- ค่าความจริง (**truth value**) ว่าเป็นจริง (**T**) หรือเท็จ (**F**)
- ประโยคที่ไม่สามารถระบุค่าความจริงได้ ไม่ถือเป็นประพจน์



ประโยค	ประพจน์	จาวาสคริปต์
3.14159	ไม่เป็น	<code>let p1=3.14159;</code>
3=2+1	เป็น	<code>let p2= (3==2+1); //ประพจน์ T F</code> <code>console.log(p1); //3.14159</code> <code>console.log(p2); //true</code>

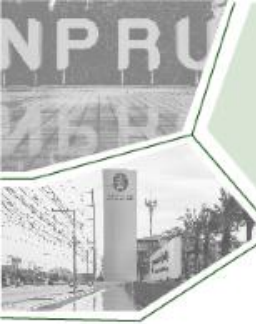


ประพจน์

ข้อสังเกต

- คำสั่ง คำถาม ขอร้อง อุทาน วลี สุภาชิต คำพังเพย ที่ไม่มีค่าความจริง ไม่เป็นประพจน์
- ประโยคที่เป็นจริงบ้างหรือเท็จบ้าง เมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ ไม่เป็นประพจน์
- ค่าความจริงที่เป็นเหตุเป็นผล
- การแจกแจงและพิสูจน์ความจริงของประพจน์
- การวิเคราะห์และแยกประพจน์ย่อยหรือรวมเป็นประพจน์ใหญ่

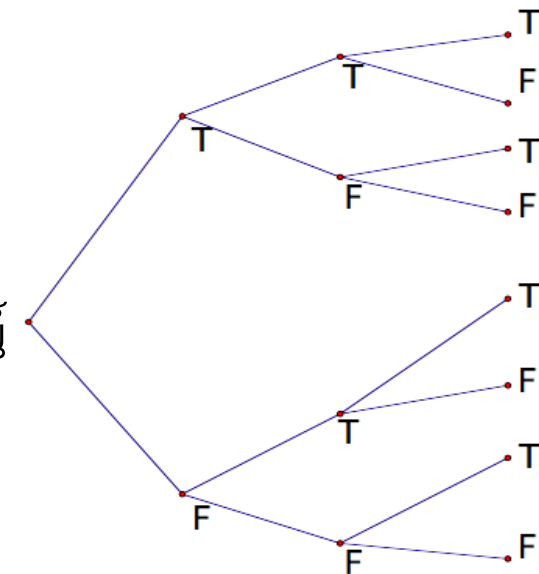




การแจกแจงค่าความจริง

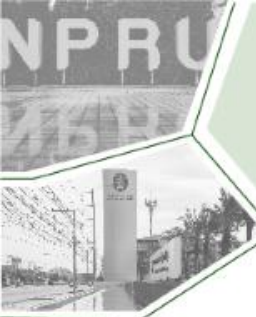
- สัญลักษณ์และการเชื่อมโยงประพจน์
- การเปรียบเทียบเงื่อนไข พิสูจน์ค่าความจริง
 - จริงใช้แทนด้วย T (true)
 - เท็จใช้แทนด้วย F (false)
- วิธีแจกแจงประพจน์จะมีค่าเท่ากับ 2^n กรณีที่เป็นไปได้ n คือจำนวนประพจน์
 - การจัดเรียงตามแผนภาพต้นไม้ (tree diagram)
 - ตารางค่าความจริง

Quesiton 1 Quesiton 2 Quesiton 3



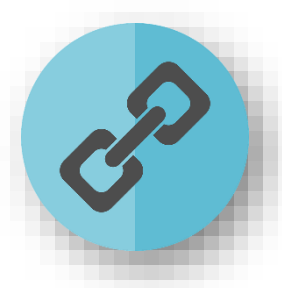
```
let p1= [true,false]; // 1 ประพจน์ 2 กรณี
let p2= [true,true,false,false]; //2 ประพจน์ 4 กรณี
let p3= [true,true,true,true,false,false,false,false]; //3 ประพจน์ 8 กรณี
let p4= [true,true,true,true,true,true,true,true,false,false,false,false,false,false,false];
//4 ประพจน์ 16 กรณี
```





การเชื่อมประพจน์

- ตัวเชื่อม (connective) คือ สิ่งที่ใช้เชื่อมประพจน์
- การสร้างประพจน์ใหม่ ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์
- การตัดสินใจอาจต้องใช้เงื่อนไขหลาย ๆ อย่างประกอบกัน



ตัวเชื่อม	ชื่อภาษาอังกฤษ	สัญลักษณ์
ไม่, ไม่ใช่, นิเสธ	Not	\neg
และ, กับ, แต่	And	\wedge
หรือ	Or	\vee
ถ้า ... แล้ว, ดังนั้น,	If ... then ...	\rightarrow
เพราะฉะนั้น ก็ต่อเมื่อ ...	If and only if ..., iff	\leftrightarrow

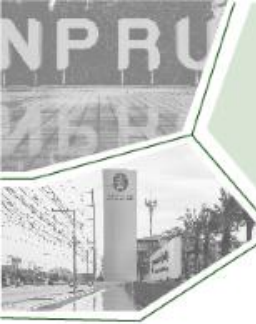
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

<https://www.tewfree.com/> ตรรกศาสตร์เบื้องต้น-ม-4/

ตัวเชื่อมแต่ละตัวมีความสำคัญไม่เท่ากัน ความสำคัญน้อยที่สุดคือนิเสธแล้วเรียงลงมา

<https://pixabay.com/th/vectors/ลูกโซ่-การเชื่อมต่อ-ไว้ก่อน-2534297/>





ประพจน์และสัญลักษณ์แทน

ประพจน์	สัญลักษณ์แทนประพจน์
$2 \neq -2$ หรือ $3 + 4 = 10$	$p \vee q$
ถ้า 8 เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\sqrt{8}$ เป็นจำนวนเต็ม	$p \rightarrow q$
$24 = 42$ แต่ $2 \neq 4$	$p \wedge q$
$5 - 6 \neq 6 + 5$ หรือ $2 < 5$ ก็ต่อเมื่อ $5^2 = 10$	$(p \vee q) \leftrightarrow r$

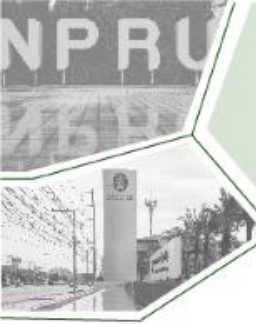


การเท่ากันของประพจน์

- ประพจน์ที่มีความจริงเหมือนกันเรียกว่า **การเท่ากันทางตรรกะ**
 - 1) การใช้ตารางค่าความจริงในการพิสูจน์
 - 2) การใช้กฎของการแทนที่
- **การแทนค่า** ประพจน์ทั้ง 2 เท่ากัน **เปรียบเทียบค่าความจริงทุกกรณี** เท่ากันหรือเหมือนกัน
- พิสูจน์ด้วยตัวเชื่อม **“ก็ต่อเมื่อ”**



p	\equiv	q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	T	F



การหาค่าความจริงของประพจน์

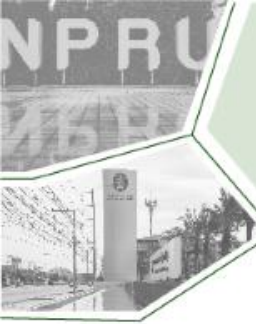
- ประพจน์ $\neg (p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$
- ประโยคสัญลักษณ์ ประกอบด้วย 2 ประพจน์มีได้ 4 กรณี



p	q	$p \vee q$	$\neg (p \vee q)$	$q \wedge p$	$\neg (p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F

- ประพจน์ใดเป็นจริงหรือเป็นเท็จ





ตารางค่าความจริงนิเสธ (\neg)



ตารางค่าความจริง		จาวาสคริปต์					
<table border="1"> <thead> <tr> <th>p</th> <th>$\neg p$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>T</td> <td>F</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>T</td> </tr> </tbody> </table>	p	$\neg p$	T	F	F	T	<pre> let p=[true,false]; let not_p = [] for (let i = 0; i < p.length; i++) { not_p.push(!p[i]); // not p } console.log(p); console.log(not_p); </pre>
p	$\neg p$						
T	F						
F	T						

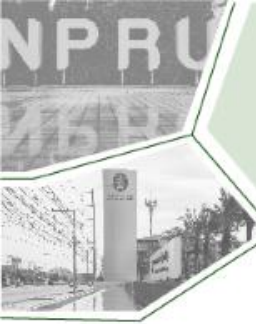
Not True!



<https://apkpure.com/not-true/com.c5.nottrue>

<http://www.leadcreation.com.au/blog/b2b-marketing-believability-testimonials/attachment/true-and-false-choice-symbol/>





ตารางค่าความจริงและ (\wedge)

ตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

จาวาสคริปต์

```
let p=[true,true,false,false];  
let q=[true,false,true,false];  
let pAq = []  
for (let i = 0; i < p.length; i++) {  
    pAq.push(p[i] && q[i]);    //p and q  
}  
  
console.log(p);  
console.log(q);  
console.log(pAq);
```



ตารางค่าความจริงหรือ (V)

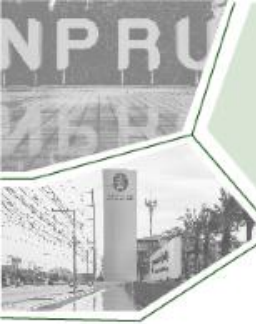
ตารางค่าความจริง

p	q	pVq
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

จาวาสคริปต์

```
let p=[true,true,false,false];  
let q=[true,false,true,false];  
let pRq = []  
for (let i = 0; i < p.length; i++) {  
    pRq.push(p[i] || q[i]);    //p and q  
}  
  
console.log(p);  
console.log(q);  
console.log(pRq);
```

OR



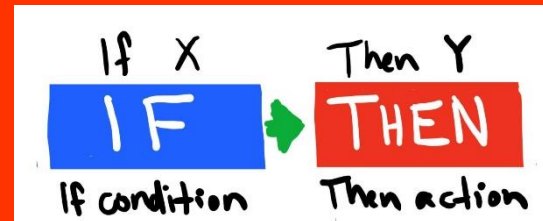
ตารางค่าความจริงถ้า..แล้ว (\rightarrow)

ตารางค่าความจริง

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

จาวาสคริปต์

```
let p=[true,true,false,false];  
let q=[true,false,true,false];  
let pTq = []  
for (let i = 0; i < p.length; i++) {  
    if(p[i]==true && q[i]==false)  
        pTq.push(false);  
    else  
        pTq.push(true);  
}  
console.log(pTq);
```



ตารางค่าความจริงก็ต่อเมื่อ (\leftrightarrow)

ตารางค่าความจริง

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

จาวาสคริปต์

```
let p=[true,true,false,false];
let q=[true,false,true,false];
let pXq = []
for (let i = 0; i < p.length; i++) {
  if(p[i]== q[i])
    pXq.push(true);
  else
    pXq.push(false);
}
console.log(pXq);
```

$P \leftrightarrow Q$

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยค่าความจริง

- พิสูจน์ว่า $2(4 - 8) = 16$ หรือ $3(1 - 5) = 12$



```
p∨q
<script>
let p= (2*(4 - 8) == 16);
let q= (3*(1 - 5) == 12);
console.log(p+' or '+q);
console.log(p||q); // p∨q
</script>
```

false or false
false

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยค่าความจริง

- พิสูจน์ว่า 5 เป็นจำนวนคี่ แต่ 8 เป็นจำนวนคู่



$p \wedge q$

```
<script>  
let p= true;  
let q= true;  
console.log(p+' and '+q);  
console.log(p&&q); // p^q  
</script>
```

true and true

true

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยค่าความจริง

- พิสูจน์ว่า ถ้าสุนัขมีสี่ขา แล้วนกมีปีก



$p \rightarrow q$

```
<script>
let p= true;
let q= true;
console.log(p+' -> '+q);
if(p==true && q==false)
  console.log(false);
else
  console.log (true);
</script>
```

```
true -> true
true
```

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยค่าความจริง

- พิสูจน์ว่า $x^2 = 9$ ก็ต่อเมื่อ $x = 3$ และ $x = -3$



$p \leftrightarrow (q \wedge r)$

```
<script>
let x=3;
let p= ((x*x)==9);
let q= (x == 3);
let r= (x == -3);
console.log(p+' <-> ('+q+' and '+r+'));
if(p == (q&&r))
  console.log(true);
else
  console.log (false);
</script>
```

true <-> (true and false)
false

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยการแทนที่

- กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ



$p \wedge q = F, p = T$

```
<script>
let p= true;
let q =false; //answer
let pAq= false;
if((p&&q)==pAq)
console.log(p+' and '+q);
</script>
```

true and false

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยการแทนที่

- กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ



$p \leftrightarrow q = F, p = F$

```
<script>
let p= false;
let q =true; //answer
let result= false;
if((p==q)==result)
console.log(p+' <-> '+q);
</script>
```

false <-> true

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยการแทนที่

- กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ



$p \rightarrow q = T, q = F$

```
<script>  
let p= false; //answer  
let q = false;  
let result= true;  
if( (p!=true) ==result)  
console.log(p+' -> '+q);  
</script>
```

false -> false

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยการแทนที่

- กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ



$p \vee q = F, q = F$

```
<script>
let p= false; //answer
let q =false;
let result= false;
if((p || q)==result)
console.log(p+' or '+q);
</script>
```

false or false

การพิสูจน์ประพจน์ด้วยการแทนที่

- พิสูจน์ค่าความจริงของ $\neg (p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$

$\neg (p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$ (1)

```
let p=[true,true,false,false];  
let q=[true,false,true,false];  
let pRq = [];  
let NpRq = [];  
let qAp = [];  
let result = [];
```

$\neg (p \vee q)$ (2)

```
for (let i = 0; i < p.length; i++) {  
  pRq.push(p[i] || q[i]); //p or q  
}  
console.log(pRq);  
for (let i = 0; i < pRq.length; i++) {  
  NpRq.push(!pRq[i]); //not p or q  
}  
console.log(NpRq);
```

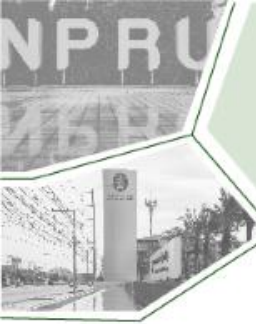
$(q \wedge p)$ (3)

```
for (let i = 0; i < q.length; i++) {  
  qAp.push(q[i] && p[i]); //q and p  
}  
console.log(qAp);
```

$\neg (p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$ (4)

```
for (let i = 0; i < NpRq.length; i++) { //(2) -> (3)  
  if((NpRq[i]== true) && (qAp[i]==false))  
    result.push(false);  
  else  
    result.push(true);}  
console.log(result);
```





การสมมูลของประพจน์

- ประพจน์สองประพจน์สมมูลกัน เมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี
- สัญลักษณ์ “ \equiv ” แทนสมมูล

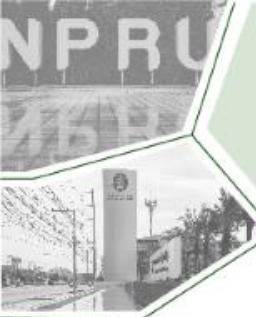
$$\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$$

- การตรวจสอบความสมมูลของ 2 ประพจน์

$$\text{ตัวเชื่อมก็ต่อเมื่อ} \leftrightarrow$$

p	q	$\neg p \rightarrow q$	$p \vee q$	$\neg p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T





การตรวจสอบความสมมูลของ 2 ประพจน์

- พิสูจน์ $\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$

```

¬p → q ↔ p ∨ q (1)
let p=[true,true,false,false];
let q=[true,false,true,false];
let Np = [];
let NpTq = [];
let pRq = [];
let result = [];

```

```

¬p → q (2)
for (let i = 0; i < p.length; i++) {
  Np.push(!p[i]); // not p
}
console.log(Np);
for (let i = 0; i < Np.length; i++) {
  if((Np[i]== true) &&
(q[i]==false))
  NpTq.push(false);
else
  NpTq.push(true);}
console.log(NpTq);

```

```

p ∨ q (3)
for (let i = 0; i < p.length; i++) {
  pRq.push(p[i] || q[i]); //q and p
}
console.log(pRq);

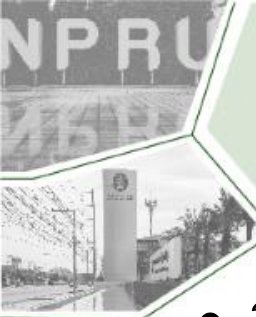
```

```

¬p → q ↔ p ∨ q (4)
for (let i = 0; i < NpTq.length; i++) {
  //(2) <-> (3)
  if((NpTq [i]== pRq[i])) // สมมูลหรือไม่
    result.push(true);
  else
    result.push(false);
}
console.log(result);

```





การพิสูจน์ประพจน์เป็นสัจนิรันดร์

- พิสูจน์ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ (1)

```
let p=[true,true,true,true,false,false,false];
let q=[true,true,false,false,true,true,false,false];
let r=[true,false,true,false,true,false,true,false];
let pTq = [];
let qTr = [];
let pTqAqTr = [];
let pTr = [];
let result = [];
```

$(p \rightarrow q)$

```
for (let i = 0; i < p.length; i++) {
  if((p[i]== true) && (q[i]==fa
    pTq.push(false);
  else
    pTq.push(true);
}
```

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ (6)

```
for (let i = 0; i < pTqAqTr.length; i++) {
  if((pTqAqTr[i]==true) && (pTr[i]==false))
    result.push(false);
  else
    result.push(true);
}
console.log(result);
```



$(q \rightarrow r)$ (3)

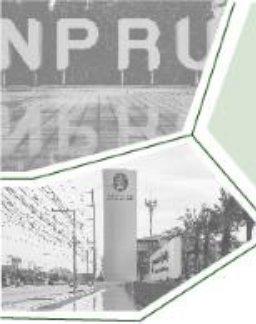
```
for (let i = 0; i < q.length; i++) {
  if((q[i]== true) && (r[i]==false)) //q ->r
    qTr.push(false);
  else
    qTr.push(true);
}
```

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)]$ (4)

```
i = 0; i < pTq.length; i++) {
  pTqAqTr.push(pTq[i]&&qTr[i]);
```

$(p \rightarrow r)$ (5)

```
i = 0; i < p.length; i++) {
  if((p[i]== true) && (r[i]==false)) //p ->r
    pTr.push(false);
```



การตรวจสอบโดยสมมติข้อขัดแย้ง

- ประพจน์นั้น ๆ มีโอกาสเกิดเท็จได้หรือไม่
- ถ้าเกิดเท็จได้ก็แสดงว่าประพจน์นั้นไม่เป็นสัจนิรันดร์
- สมมติให้ประพจน์มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- หาค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ ว่าค่าความจริงประพจน์ขัดแย้งกันหรือไม่
 - ขัดแย้งกัน ไม่เกิดเท็จ ประพจน์เป็นสัจนิรันดร์
 - ไม่ขัดแย้งกัน เกิดเท็จได้ ประพจน์ไม่เป็นสัจนิรันดร์

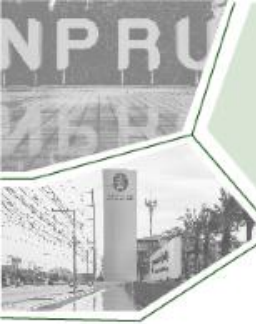


<https://pxhere.com/th/photo/1588207>

<https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/truth-information-mosaic-icon-spheric-items-vector-28761320>

<https://www.iconfinder.com/icons/1894643/>

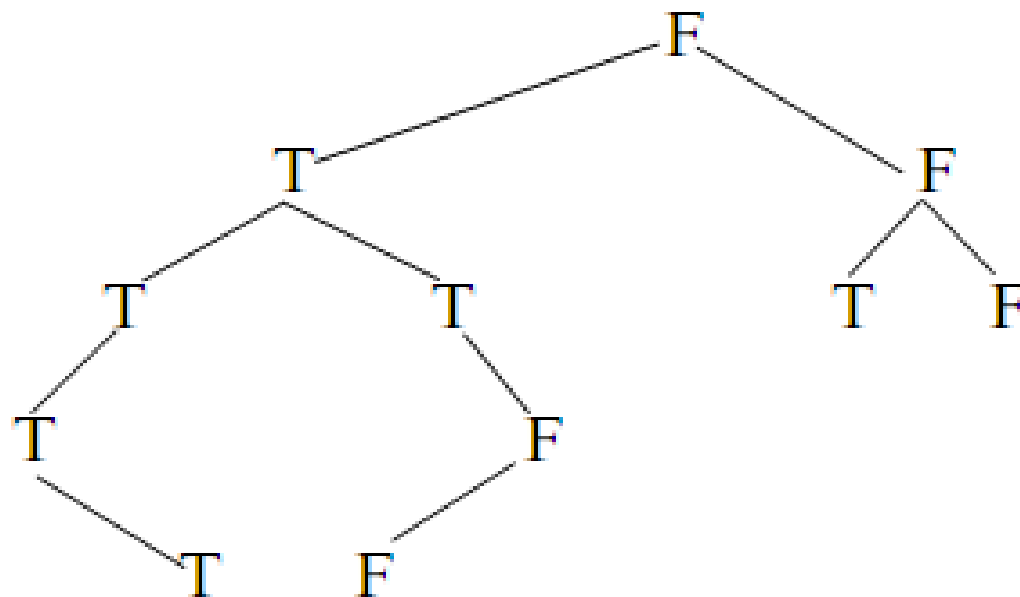


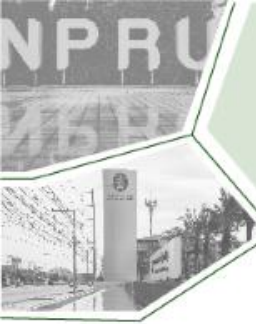


การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

- ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

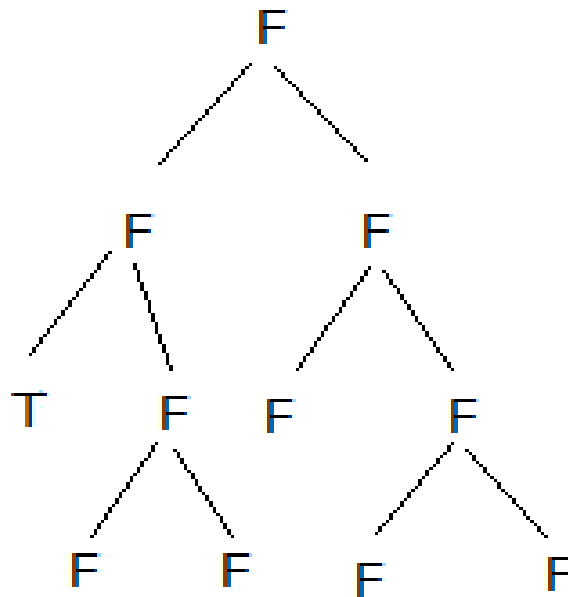




การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

- ประพจน์ $[p \wedge (q \vee r)] \vee [(\neg p) \vee (q \vee r)]$ เป็นสัจนิรันดร์

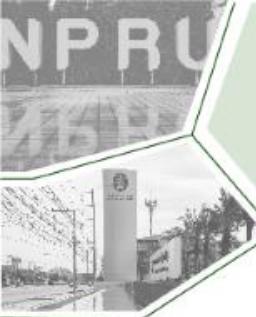
$$[p \wedge (q \vee r)] \vee [(\sim p) \vee (q \vee r)]$$



การอ้างเหตุผล

- การอ้างเหตุผลประกอบด้วย
 - 1) ตอนนำ เรียกว่า เหตุ หรือ สิ่งที่กำหนดให้ ในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$
 - 2) ตอนตาม เรียกว่า ผล หรือ ข้อสรุป ในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ C
- การสรุปผลมี 2 แบบ คือ
 - แบบที่ 1 สรุปผลสอดคล้องกับเหตุที่กำหนด สมเหตุสมผล (Valid)
 - แบบที่ 2 สรุปผลไม่สอดคล้องกับเหตุที่กำหนด ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)





ถ้าเหตุเป็นจริง แล้วผลต้องเป็นจริง

1. นำเหตุที่กำหนดให้มาทั้งหมดเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม “และ” ดังนี้

$$P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \dots \wedge Pn$$

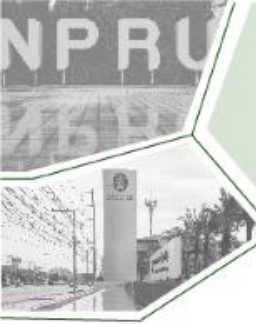
2. นำเหตุทั้งหมดในข้อที่ 1 เชื่อมกับผลด้วยตัวเชื่อม “ถ้า... แล้ว...” ดังนี้

$$(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \dots \wedge Pn) \rightarrow C$$

3. พิจารณารูปแบบ $(P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge \dots \wedge Pn) \rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

- เป็นสัจนิรันดร์ สมเหตุสมผล
- ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ไม่สมเหตุสมผล





การอ้างเหตุผล สมเหตุสมผล

- เหตุ 1) $p \rightarrow q$ 2) $\neg q$
- ผล $\neg p$
- $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$



p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T



การให้เหตุผล

- พิสูจน์ค่าความจริงหรือพิสูจน์ความขัดแย้ง



$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ (1)

```
let p=[true,true,false,false];
let q=[true,false,true,false];
let Np = [];
let Nq = [];
let pTq = [];
let pTqANq = [];
let result = [];
```

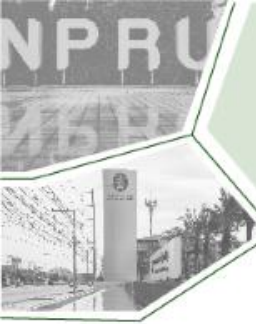
$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ (2)

```
for (let i = 0; i < p.length; i++) {
  Np.push(!p[i]); // not p
  Nq.push(!q[i]); // not q
  if((p[i]== true) && (q[i]==false)) //p -> q
    pTq.push(false);
  else
    pTq.push(true);

  pTqANq.push(pTq&&Nq); // and
  if((pTqANq[i]== true) && (Np[i]==false))
    result.push(false);
  else
    result.push(true);
}
```

$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ (3)

```
console.log(Np);
console.log(Nq);
console.log(pTq);
console.log(pTqANq);
console.log(result);
```



ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

- การตรวจสอบประโยคเปิด
- การเติมตัวบ่งปริมาณในประโยคเปิด
- การกำกับด้วยตัวบ่งปริมาณ
- การทำประโยคให้อยู่ในรูปตรรกศาสตร์
- การกำหนดค่าความจริงที่มีตัวแปรสองตัว พร้อมทั้งตัวบ่งปริมาณ

$$\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$$

$$\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$$

$\forall x$ $\forall x \exists y [x + y = 0]$ $\exists x$
 $\exists x [(x \in A) \wedge (x^2 < 2)]$



