



บทที่ 2

การเคลื่อนที่ของวัตถุใน 1 มิติ

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.ณัฐกฤตา จันทิมา

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



หัวข้อเนื้อหาประจำบท



- ทฤษฎีบทโมเมนตัมและพลังงาน
 - แรงกระทำขึ้นกับเวลา
 - แรงกระทำขึ้นกับความเร็ว
 - แรงกระทำเป็นแรงอนุรักษ์ที่ขึ้นกับตำแหน่ง
-

ทฤษฎีบทโมเมนตัมและพลังงาน

ความเร่งของวัตถุสามารถหาได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา และจากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้ว่าถ้าวัตถุมีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ตามแนวแกน x ภายใต้การกระทำของแรง F

การเคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นไปตามสมการ $F = m \frac{dv}{dt}$

นิยามโมเมนตัม (ใช้สัญลักษณ์ p) หรือโมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุขณะเวลาใด ๆ สามารถหาได้จากผลคูณระหว่างมวลกับความเร็วของวัตถุในขณะนั้น

$$p = mv$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$= v \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt}$$

$$= m \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = F$$



ถ้านำ dt คูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ
โดยที่โมเมนตัมเปลี่ยนจาก p_1 ไปเป็น p_2 จะได้

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

สมการนี้ เรียกว่า ทฤษฎีบทโมเมนตัมในรูปปริพันธ์ (integral) โดยปริพันธ์ทางด้านขวาเรียกว่า การดล (impulse) ดังนั้นการดลเนื่องจากแรงมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ เนื่องจากการกระทำของแรงระหว่างเวลา t_1 ถึง t_2

นิยามของพลังงานจลน์ (kinetic energy) ของวัตถุ (ใช้สัญลักษณ์ T) คือ

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

จากสมการ

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt}$$

คูณตลอดด้วย v จะได้

$$Fv = mv \frac{dv}{dt}$$

$$mv dv = Fv dt$$

หรือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = Fv$$

$$\frac{dT}{dt} = Fv$$





ปริมาณทางขวาของสมการ $\frac{dT}{dt} = Fv$ คือกำลัง (power) หรืออัตราการทำงานโดยแรง ปริมาณในวงเล็บทางด้านซ้ายจึงมีมิติเป็นงาน เรียกว่า พลังงานจลน์ ดังนั้นสมการนี้ มีความหมายว่า อัตราการทำงานโดยแรงมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของวัตถุเทียบกับเวลา หรือทฤษฎีบทพลังงาน (energy theorem) ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์

ถ้านำ dt คูณตลอดแล้วหาปริพันธ์จากเวลา t_1 ถึง t_2 ซึ่งพลังงานจลน์เปลี่ยนจาก T_1 เป็น T_2 จะได้

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_2} dT &= \int_{t_1}^{t_2} Fv dt \\ T_2 - T_1 &= \int_{t_1}^{t_2} Fv dt\end{aligned}\quad (1)$$

จาก $v = \frac{dx}{dt}$ จะได้ $dx = vdt$ สามารถเขียนปริมาณทางขวาของสมการ ได้ใหม่เป็น

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} Fdx \quad (2)$$

โดยที่ Fx คืองาน ดังนั้น Fv เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของงานเทียบกับเวลา หรืออัตราการทำงานซึ่งก็คือ กำลัง เมื่อ x_1 และ x_2 เป็นพิกัดเมื่อเวลา t_1 ถึง t_2 ตามลำดับ ปริพันธ์ทางขวาของสมการ คือ งานที่ทำโดยแรงแล้วมีผลทำให้วัตถุเคลื่อนที่เปลี่ยนพิกัดจาก x_1 เป็น x_2 และงานนี้มีค่าเท่ากับ พลังงานจลน์ที่เปลี่ยนไปของวัตถุ เรียกสมการ (1) และ สมการ (2) ว่า ทฤษฎีงาน-พลังงาน ในรูป ปริพันธ์

แรงกระทำขึ้นกับเวลา

พิจารณาแรงภายนอกที่กระทำต่ออนุภาคหรือวัตถุที่เป็นฟังก์ชันของเวลา t สามารถใช้แคลคูลัสในการหาความเร็วและการกระจัด จากสมการการเคลื่อนที่ที่มีแรงภายนอกกระทำทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่เปลี่ยนไปตามเวลา สามารถหาขนาดของแรงที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ได้ดังนี้

$$F(t) = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

นำ dt คูณตลอดสมการแล้วหาปริพันธ์ จะได้

$$\int_{t_0}^t F(t) dt = \int_{v_0}^v m dv = m \int_{v_0}^v dv$$

$$\int_{t_0}^t F(t) dt = m(v - v_0)$$

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$



จากความสัมพันธ์อนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา มีค่าเท่ากับความเร็ว ดังนั้น

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

นำ dt คูณตลอดสมการแล้วหาปริพันธ์ จะได้

$$\int_{x_0}^x dx = v_0 \int_{x_0}^x dt + \frac{1}{m} \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt$$

$$x - x_0 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t F(t) dt$$

ดังนั้น การกระจัดของอนุภาคในแนวราบ หาได้จากสมการ

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t F(t) dt$$

ถ้าทราบค่า $F(t)$ จะสามารถคำนวณหาค่าความเร็ว $v(t)$ และการกระจัด $x(t)$ ได้

ตัวอย่างที่ 2.1 พิจารณาการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนอิสระมวล m ประจุ $-e$ ซึ่งเริ่มต้นประจุหยุดนิ่ง จากนั้นถูกคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความเข้มของสนามไฟฟ้า E มากระทำ จงหาความเร็ว (v) และ ตำแหน่ง (x) ของอิเล็กตรอนอิสระที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

กำหนดให้
$$E = E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

เมื่อ ω คือ ความถี่ของการแกว่งกวัด (oscillation frequency) ซึ่งตกกระทบด้วยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ϕ คือ เฟสเริ่มต้น

วิธีทำ แรงกระทำต่ออิเล็กตรอนคำนวณได้จากสมการ $F = qE$ คือ

$$\begin{aligned} F &= -eE_x \\ &= -eE_0 \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

จาก $F = m \frac{dv}{dt}$

จะได้ $m \frac{dv}{dt} = -eE_0 \sin(\omega t + \phi)$

ดังนั้น $\frac{dv}{dt} = -\frac{eE_0}{m} \sin(\omega t + \phi)$

หาปริพันธ์ โดยให้ที่ $t = 0, v = 0$ จะได้

$$\int_0^v dv = -\frac{eE_0}{m} \int_0^t \sin(\omega t + \phi) dt$$



$$v = -\frac{eE_0}{m\omega} \int_0^t \sin(\omega t + \phi) d(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \phi) \Big|_0^t$$

$$= \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \phi) - \frac{eE_0}{m\omega} \cos \phi$$

หรือ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \phi) - \frac{eE_0}{m\omega} \cos \phi$$

หาปริพันธ์อีกครั้ง และให้ที่ $t = 0, x = 0$ จะได้

$$x = \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \phi) - \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin \phi - \left(\frac{eE_0}{m\omega} \cos \phi \right) t$$

ตัวอย่างที่ 2.2 วัตถุมวล m เริ่มต้นอยู่หนึ่งที่ตำแหน่ง $x_0 = 0$ บนพื้นราบที่ไม่มีแรงเสียดทาน ที่เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ ต่อมามีแรง $F = F_0 e^{-\lambda t}$ กระทำต่อวัตถุนี้โดยที่ λ เป็นค่าคงตัวบวก จงหาความเร็วและการกระจัดของวัตถุนี้และจงเปรียบเทียบความเร็วและตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไปน้อย ๆ และเมื่อเวลาผ่านไปนานมาก ๆ

วิธีทำ จากสมการความสัมพันธ์ของแรงเป็นฟังก์ชันของเวลา คือ

$$F = F_0 e^{-\lambda t}$$

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

จะได้

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 e^{-\lambda t}$$

นำ dt คูณตลอดสมการแล้วหาปริพันธ์ จะได้

$$m \int_{v_0}^v dv = F_0 \int_{t_0}^t e^{-\lambda t} dt$$

$$\int_0^v dv = \frac{F_0}{m} \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

$$v = \frac{F_0}{m(-\lambda)} \left[e^{-\lambda t} \right]_0^t$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุนี้คือ

$$v = -\frac{F_0}{m\lambda} \left[e^{-\lambda t} - 1 \right] = \frac{F_0}{m\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t} \right] \quad (1)$$

จากอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา จะได้ความเร็ว

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m\lambda} [1 - e^{-\lambda t}]$$

นำ dt คูณตลอดสมการแล้วหาปริพันธ์ จะได้

$$dx = \frac{F_0}{m\lambda} [1 - e^{-\lambda t}] dt$$

$$\int_{x_0=0}^x dx = \frac{F_0}{m\lambda} \int_{t_0=0}^t [1 - e^{-\lambda t}] dt$$

$$x = \frac{F_0}{m\lambda} \int_0^t dt - \frac{F_0}{m\lambda} \int_0^t e^{-\lambda t} dt$$

$$x = \frac{F_0 t}{m\lambda} - \frac{F_0}{m\lambda} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^t$$

ดังนั้น การกระจัดของวัตถุนี้ คือ

$$x = \frac{F_0 t}{m\lambda} + \frac{F_0}{m\lambda^2} [e^{-\lambda t} - 1] \quad (2)$$

เปรียบเทียบความเร็วและตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไปน้อย ๆ และเมื่อเวลาผ่านไปนานมาก ๆ

1. เมื่อ t มีค่าน้อย ๆ ($t = 0$) พิจารณาจากสมการ (1) และ (2) พบว่า

$$v = \frac{F_0}{m\lambda} [1 - e^{-\lambda t}]$$



(เมื่อ $e^0 = 1$)

$$v \cong \frac{F_0}{m\lambda} [1 - e^{-\lambda(0)}] = \frac{F_0}{m\lambda} [1 - 1] = 0$$

$$x = \frac{F_0 t}{m\lambda} + \frac{F_0}{m\lambda^2} [e^{-\lambda t} - 1]$$

$$x \cong \frac{F_0(0)}{m\lambda} + \frac{F_0}{m\lambda^2} [e^{-\lambda(0)} - 1] = 0$$



2. เมื่อ t มีค่ามาก ๆ ($t = \infty$) พิจารณาจากสมการ (1) และ (2) พบว่า

$$v = \frac{F_0}{m\lambda} [1 - e^{-\lambda t}]$$

(เมื่อ $e^\infty = \infty$)

$$v \cong \frac{F_0}{m\lambda} [1 - e^{-\lambda(\infty)}] = \frac{F_0}{m\lambda}$$

และ

$$x = \frac{F_0 t}{m\lambda} + \frac{F_0}{m\lambda^2} [e^{-\lambda t} - 1]$$

$$x \cong \frac{F_0(\infty)}{m\lambda} + \frac{F_0}{m\lambda^2} [e^{-\lambda(\infty)} - 1] = \frac{F_0 t}{m\lambda} - \frac{F_0}{m\lambda^2}$$

แรงกระทำขึ้นกับความเร็ว

การศึกษากรณีของแรงหน่วง (damping force) เป็นฟังก์ชันของความเร็ว สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$F(v) = m \frac{dv}{dt}$$

นำ dt คูณตลอดสมการแล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} dt$$

จากนั้นหาปริพันธ์จะได้

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt$$



$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_0}{m}$$

ถ้าทราบค่า $F(v)$ ในสมการ จะสามารถคำนวณหาความเร็ว v ได้ และสามารถเขียน v ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเพื่อเขียนสมการคำตอบทั่วไปได้เป็น

$$v = \frac{dx}{dt} = f\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right)$$

และการกระจัดเขียนให้อยู่ในรูปสมการคำตอบทั่วไปได้เป็น

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right) dt$$

ตัวอย่างที่ 2.3 เรือลำหนึ่งมวล m เล่นบนผิวน้ำในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วลดลง v ดังสมการ

$$v = c(t - t_1)^2$$

เมื่อ c คือ ค่าคงตัว และ t_1 เป็นเวลาที่เรือเคลื่อนที่จนหยุดนิ่ง จงหาแรงที่กระทำต่อเรือที่เป็นฟังก์ชันกับความเร็วของเรือ ($F(v)$)

วิธีทำ จากสมการ

$$v = c(t - t_1)^2$$

$$\frac{dv}{dt} = c(2t - 2t_1)$$

จากสมการ

$$\begin{aligned} F(t) &= m \frac{dv}{dt} \\ &= 2mc(t - t_1) \end{aligned}$$

$$(t - t_1)^2 = \frac{v}{c}$$

$$t - t_1 = \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore F(v) &= 2mc \left(\frac{v}{c} \right)^2 \\ &= 2m(cv)^{1/2} \end{aligned}$$

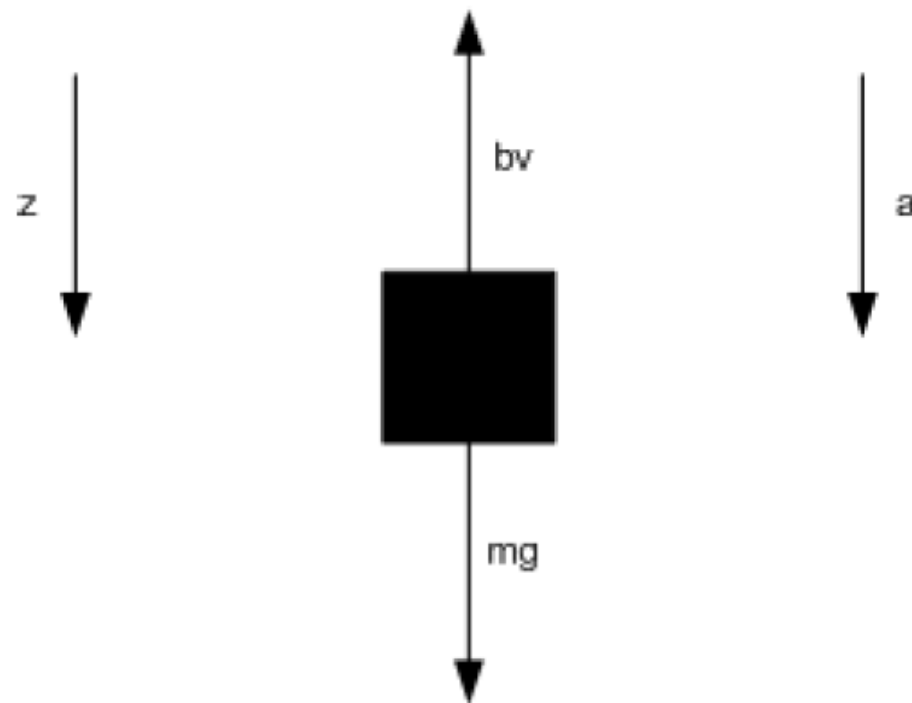
ดังนั้น แรงที่กระทำต่อเรอมีขนาดเท่ากับ $2m(cv)^{1/2}$ และทำให้เรอมีความเร็วลดลง จึงเป็นแรงต้านมีทิศทางตรงข้ามกับความเร็ว จึงเขียนได้เป็น

$$F(v) = -2m(cv)^{1/2}$$



ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง การกระจัดและความเร็วกับเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่ลงในแนวตั้งในตัวกลางที่แรงต้านการเคลื่อนที่แปรผันโดยตรงกับขนาดของความเร็วของวัตถุ

วิธีทำ



ภาพประกอบตัวอย่างที่ 2.4 การกระจัดและความเร็วกับเวลาของวัตถุที่เคลื่อนที่ลงในแนวตั้ง

กำหนดให้แกน $+z$ เป็นแกนที่ชี้ลงตามแนวตั้ง และวัตถุเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็วต้น v_0 จากความสูง h ภายใต้แรงความโน้มถ่วง mg มีแรงต้านการเคลื่อนที่ bv โดย b เป็นค่าคงตัว
ถ้าให้ m เป็นมวลของวัตถุ จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ทำให้ได้ว่า

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

$$\frac{dv}{mg - bv} = \frac{1}{m} dt$$



$$\int \frac{dv}{mg - bv} = \int \frac{1}{m} dt$$

$$\frac{1}{b} \ln(mg - bv) = \frac{t}{m} + C \quad ; \quad C = \text{ค่าคงตัวใด ๆ} \quad (1)$$

หาค่าคงตัว C ได้ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น

โดยกำหนดให้ที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ความเร็วของวัตถุมีค่าเป็น v_0

$$C = -\frac{1}{b} \ln(mg - bv_0) \quad (2)$$

แทนค่า C จากสมการ (2) ลงในสมการ (1) จะได้

$$\frac{mg - bv}{mg - bv_0} = e^{\left(-\frac{bt}{m}\right)}$$

$$v = \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0 \right) e^{\left(-\frac{bt}{m} \right)} \quad (3)$$

จากสมการ (3) จะเห็นว่า เมื่อ t มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ความเร็ว v จะมีค่าเข้าใกล้ $\frac{mg}{b}$ ซึ่งมีค่าคงตัว เรียกความเร็วที่คงที่นี้ว่า ความเร็วปลาย (terminal velocity) ถ้า $b = km$ โดย k เป็นค่าคงตัว และ m เป็นมวลของวัตถุ ค่าความเร็วปลายนี้จะเป็น $\frac{g}{k}$ และเมื่อแทนความเร็วด้วยอนุพันธ์ของการกระจัด (z) เทียบกับเวลา แล้วหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

$$z = \frac{mgt}{b} + \left(\frac{m^2 g}{b^2} - \frac{mv_0}{b} \right) e^{\left(-\frac{bt}{m} \right)} + D \quad (4)$$

D คือค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น โดยให้ z_0 เป็นตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)

จะได้

$$D = z_0 - \frac{m^2 g}{b^2} + \frac{mv_0}{b}$$

เมื่อแทนค่า D ลงในสมการ (4) แล้วจัดพจน์ใหม่จะได้

$$z = z_0 + \frac{mg}{b} \left(t - \frac{m}{b} \right) + \frac{mv_0}{b} \left(\frac{mg}{b} - v_0 \right) \frac{m}{b} e^{\left(-\frac{bt}{m} \right)}$$

แรงกระทำเป็นแรงอนุรักษ์ที่ขึ้นกับตำแหน่ง



การพิจารณาแรงอนุรักษ์ (conservative force) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งการเคลื่อนที่ แรงอนุรักษ์ที่ขึ้นกับตำแหน่งของวัตถุ เช่น แรงโน้มถ่วง แรงระหว่างประจุไฟฟ้า เป็นต้น จัดว่าเป็นการเคลื่อนที่ที่สำคัญที่สุดแบบหนึ่ง สมการของการเคลื่อนที่เขียนได้เป็น

$$m \frac{dv}{dt} = F(x)$$

จากทฤษฎีบทพลังงาน

จะได้

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (1)$$

ปริพันธ์ทางขวาของสมการ (1) คืองานที่กระทำโดยแรงอนุรักษ์ $F(x)$ โดยอนุภาค

เคลื่อนที่จากตำแหน่ง x_0 ไปตำแหน่ง x งานนี้จะกลายเป็นพลังงานศักย์ที่มีอยู่บนวัตถุ ทำให้วัตถุนั้นมีพลังงานศักย์เพิ่มขึ้นหรือมีพลังงานศักย์ลดลง พิจารณาจากนิยามของพลังงานศักย์ (potential energy) $U(x)$ ที่มีบนวัตถุใด ๆ คือ งานที่กระทำเนื่องจากแรง $F(x)$ ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่ง x ใด ๆ ไปยังตำแหน่งมาตรฐานที่กำหนดขึ้น x_s ได้ว่า

$$W = \int_x^{x_s} F(x) dx = U(x) - U(x_s)$$

หรือ

$$\int_{x_s}^x F(x) dx = U(x_s) - U(x)$$

$$U(x) = \int_x^{x_s} F(x) dx = - \int_{x_s}^x F(x) dx \quad (2)$$

จากสมการ (2) สามารถเขียนงานที่กระทำโดยแรง F ให้อยู่ในรูปของพลังงานศักย์ $U(x)$ ที่ตำแหน่ง x และ x_0 ได้

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x F(x) dx &= \int_{x_0}^{x_s} F(x) dx + \int_{x_s}^x F(x) dx \\ &= U(x_0) + U(x) \end{aligned} \quad (3)$$

แทนสมการ (3) ในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= U(x_0) + U(x) \\ \frac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)\end{aligned}\quad (4)$$

สมการ (4) คือกฎการอนุรักษ์พลังงาน แต่ละข้างของสมการคือ พลังงานรวมของวัตถุ (E) ที่ตำแหน่งหนึ่ง ๆ จะคงที่เสมอ ไม่ว่าอนุภาคจะอยู่ ณ ตำแหน่งใด ๆ กฎนี้จะเป็นจริงต่อเมื่อแรงเป็นแรงอนุรักษ์หรือแรงที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งนั้น อาจเขียนพลังงานรวมที่ตำแหน่ง x ใด ๆ ดังนี้

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = T + U = E = \text{ค่าคงตัว} \quad (5)$$

สมการ (5) แสดงกฎการอนุรักษ์พลังงานรวม (law of conservative of total energy) ซึ่งกฎนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อแรงอนุรักษ์เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งอย่างเดียว

จากสมการ (5) หา v โดยวิธีพีชคณิต จะได้ว่า

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \quad (6)$$

เครื่องหมายบวกและลบในสมการ (6) แสดงทิศของความเร็ว (ทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ) ถ้าเคลื่อนที่ในทิศทางที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น v จะมีเครื่องหมายเป็นบวก แต่ถ้าเคลื่อนที่ในทิศทางที่ x มีค่าลดลง v จะมีเครื่องหมายเป็นลบ และจากสมการ (6) แทน $v = \frac{dx}{dt}$ แล้วหาปริพันธ์ โดยกำหนดให้ที่เวลา t_0 อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง x_0 ที่เวลา t อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง x สามารถหา $x(t)$ ได้ดังนี้

$$\frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

นั่นคือ ถ้าทราบ $U(x)$ ก็สามารถหา x ที่เป็นฟังก์ชันของ t ได้

ในกรณีนี้เงื่อนไขเริ่มต้นจะอยู่ในรูปของค่าคงตัว E และ x_0 จากสมการ (2) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงและพลังงานศักย์ได้เป็น

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 วัตถุมวล m ถูกกระทำโดยแรง $F(x) = a - 2bx$ โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่

(ก) จงหาพลังงานศักย์ $U(x)$

(ข) จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $F(x)$ กับ x และ $U(x)$ กับ x

(ค) จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้พลังงานศักย์ $U(x)$ ทุกแบบที่เป็นไปได้

วิธีทำ (ก) จาก

$$F(x) = a - 2bx$$

แต่

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = a - 2bx$$

$$-\int_0^U dU = \int_0^x (a - 2bx) dx$$

$$-U(x) = ax - bx^2$$

หรือ
$$U(x) = -ax + bx^2$$

(ข) หากกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $F(x)$ กับ x

จาก
$$F(x) = a - 2bx$$

ที่ $x = 0, F(x) = a$

ที่ $F(x) = 0, x = \frac{a}{2b}$

ดังนั้นกราฟระหว่าง $F(x)$ กับ x จะเป็นเส้นตรง โดยมีจุดตัดแกนอยู่ที่ a และ $\frac{a}{2b}$ และมี

ความชันเท่ากับ $\frac{dF(x)}{dx} = -2b$ ดังแสดงในภาพประกอบตัวอย่างที่ 2.5 (ก)

หากกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $U(x)$ กับ x



จาก $U(x) = -ax + bx^2$

ที่ $x = 0, U(x) = 0$

ที่ $U(x) = 0, -ax + bx^2 = 0$

$$x(-a + bx) = 0$$

$$x = 0, \frac{a}{b}$$

หา $\frac{dU}{dx} = -a + 2bx$

ที่จุดซึ่ง $\frac{dU}{dx} = 0 = -a + 2bx$

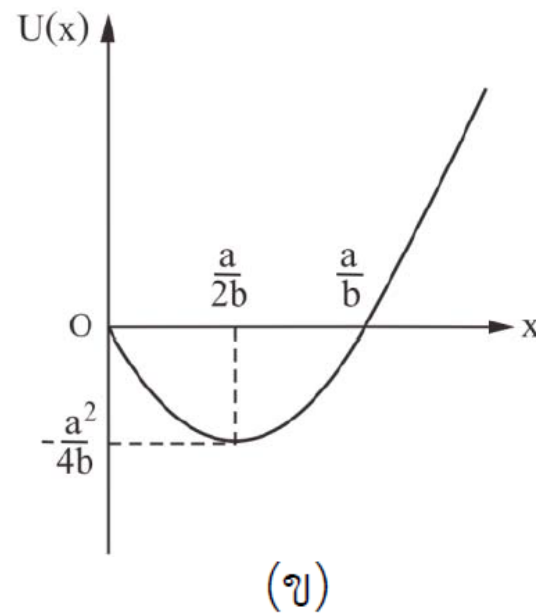
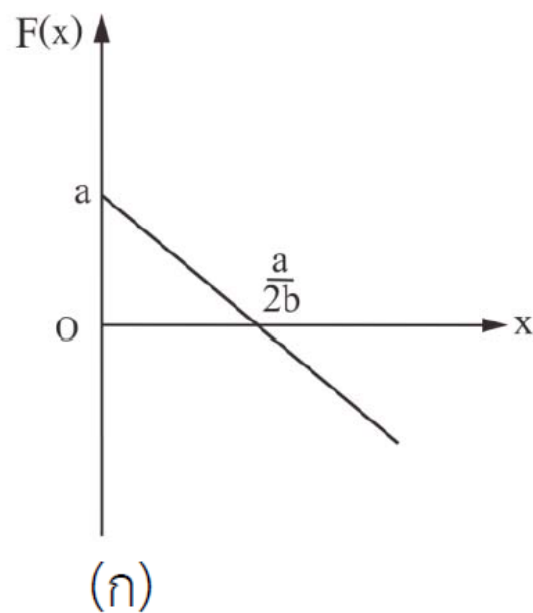
จะได้ $x = \frac{a}{2b}$

และที่จุด $x = \frac{a}{2b}$, $U(x) = -ax + bx^2$

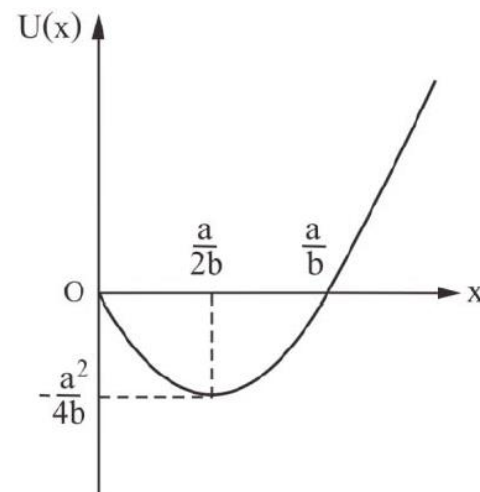
$$= -a\left(\frac{a}{2b}\right) + b\left(\frac{a}{2b}\right)^2$$

$$= -\frac{a^2}{4b}$$

ดังนั้นกราฟระหว่าง $U(x)$ กับ x ดังแสดงในภาพ (ข)



ภาพประกอบตัวอย่างที่ 2.5 กราฟระหว่างพลังงานศักย์ $U(x)$ และตำแหน่ง x



(ค) จากกราฟในภาพ (ข) จะเห็นว่าถ้าวัตถุมีพลังงาน E ซึ่งน้อยกว่า $U_{\min} = -\frac{a^2}{4b}$

การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นไปได้ ถ้าวัตถุมีพลังงาน $0 > E > -\frac{a^2}{4b}$ การเคลื่อนที่ของวัตถุจะถูกจำกัด

อยู่ระหว่าง $x = 0$ และ $x = \frac{a}{b}$ และวัตถุจะมีจุดวกกลับ 2 จุด สำหรับวัตถุที่มีพลังงาน $E > 0$ จะมี

การเคลื่อนที่ระหว่าง 0 กับ x โดยที่ x หาได้จากสมการ $U(x) = E = -ax + bx^2$ ถ้าวัตถุอยู่

ทางด้านซ้ายมือของจุด $x = \frac{a}{b}$ จะไม่สามารถข้ามเส้นโค้งของพลังงานศักย์ $U(x)$ ออกไปได้

บทที่ 2

จบแล้วค่ะ

นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทมาส่งด้วยนะคะ

