บทที่ 3
การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิก

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.ณัฐกฤตา จันทิมา

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

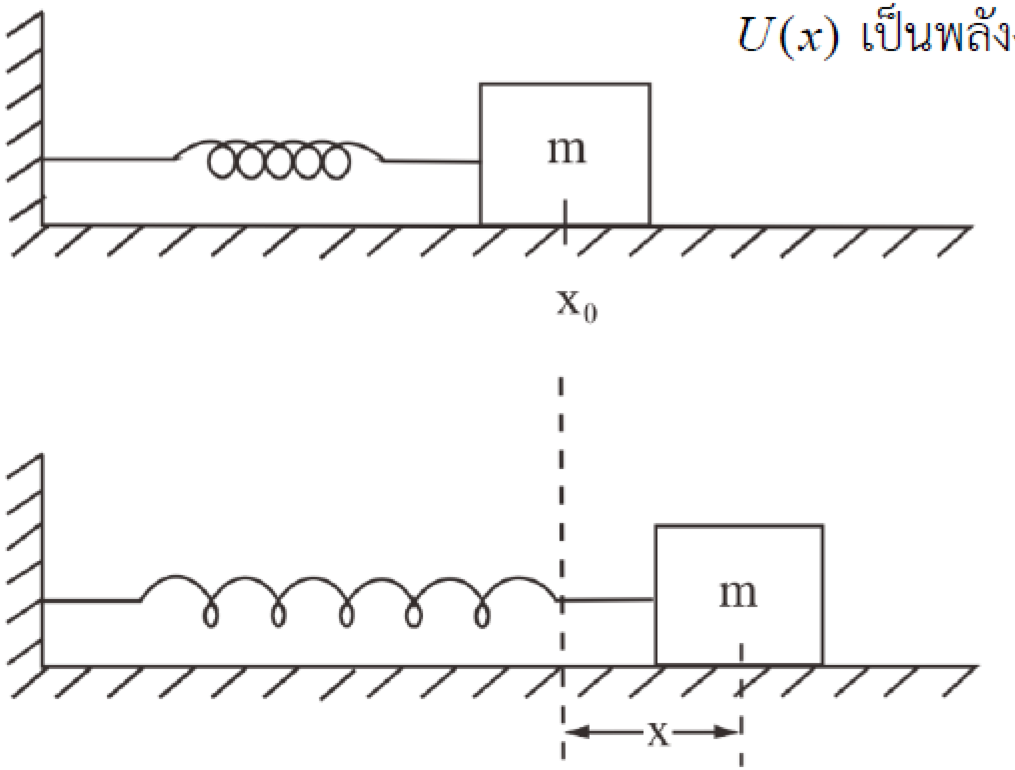
- ออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก
- สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สอง
- ออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบแดมพ์ฮาร์มอนิก

ออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก คือการเคลื่อนที่ของวัตถุกลับไปกลับมาผ่านจุดสมดุลเสถียรของวัตถุ ตัวอย่างที่เห็นได้ง่ายคือ การเคลื่อนที่ของมวลที่ถูกยึดกับสปริง ดังภาพที่ 3.1 โดยสมมุติว่าแรงเสียดทานมีค่าน้อยมาก

ให้ x_0 เป็นตำแหน่งสมดุลเสถียรของมวล m

$U(x)$ เป็นพลังงานศักย์ของวัตถุที่ระยะ x ใด ๆ จากจุดสมดุล



ภาพที่ 3.1 วัตถุมวล m ยึดติดกับสปริง

ต้องการหา $F(x)$ และ $U(x)$ ของระบบนี้เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของมวล m โดยการกระจาย $U(x)$ แบบอนุกรมของเทย์เลอร์ (Talor's series) รอบจุด x_0

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}(x-x_0)^2 + \ldots \qquad (3.1)$$

ถ้าเลือก $x_0 = 0$ จะได้

$$U(x) = U_0 + \left(\frac{dU}{dx}\right)_0 x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 x^2 + \ldots$$

เมื่อ U_0 เป็นพลังงานศักย์ที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ สามารถเลือกให้เป็นศูนย์ ทราบแล้วว่าเงื่อนไขสำหรับจุดสมดุลเสถียรคือ $\frac{dU}{dx} = 0$

ดังนั้น $$U(x) = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 x^2 + \ldots \tag{3.2}$$

และ $$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 x + \ldots \tag{3.3}$$

ที่จุดสมดุลเสถียร $U(x)$ มีค่าต่ำสุด และ $\dfrac{d^2U}{dx^2} > 0$

ถ้าให้ $$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 = k = \text{ค่าคงที่}$$

ดังนั้น $$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \ldots \tag{3.4}$$

และ $$F(x) = -kx + \ldots \tag{3.5}$$

ถ้าการกระจัด (displacement), x ของวัตถุมีค่าน้อย สามารถตัดทิ้งตั้งแต่เทอมที่ 2 ขึ้นไป ในสมการ (3.4) และ (3.5) ดังนั้นจะได้

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.6}$$

$$F(x) = -kx \tag{3.7}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่า F มีทิศตรงข้ามกับ x และมีทิศชี้เข้าหาจุดสมดุลตลอดเวลา ดังนั้น F พยายามจะดึงวัตถุให้สู่จุดสมดุล แรงอันนี้เรียกว่าดังดึงกลับของสปริง การเคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นการเคลื่อนที่แบบมีขอบเขต

จากสมการ (3.7) สมการการเคลื่อนที่คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

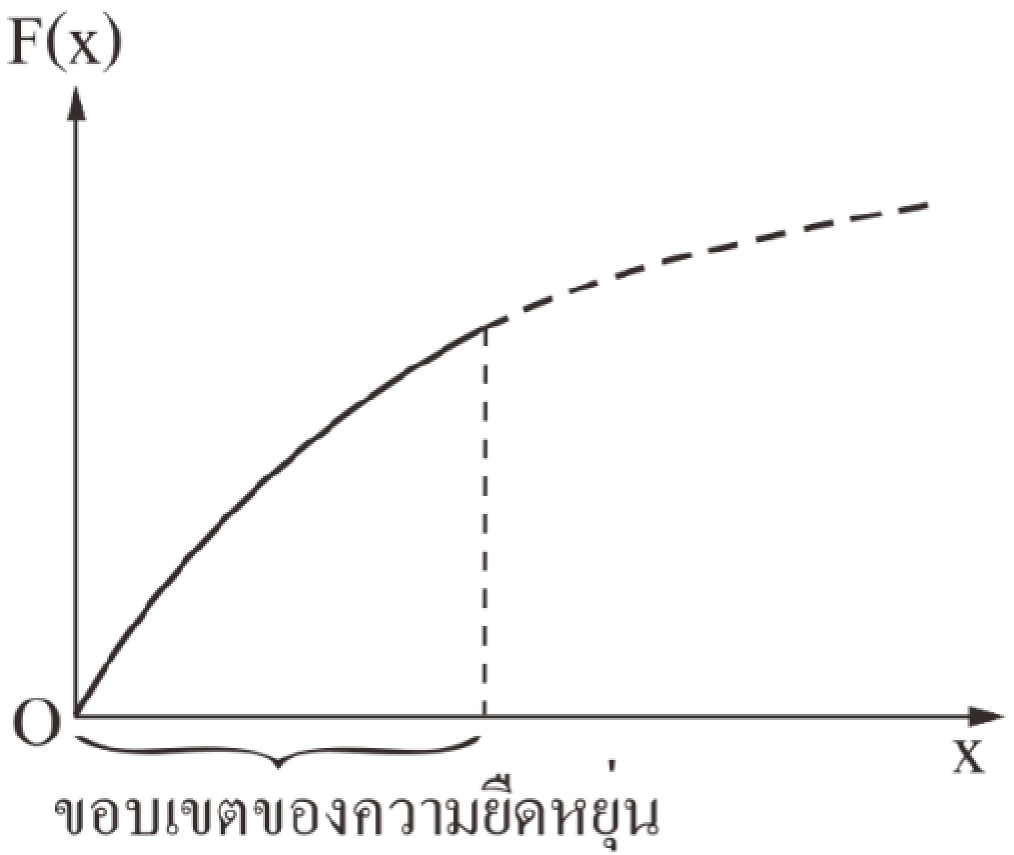
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (3.8)$$

สมการ (3.8) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของมวล m ซึ่งทำหน้าที่เหมือนออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

จากสมการ (3.7) จะเห็นว่า แรงดึงกลับ F แปรตาม x ซึ่งเป็นไปตามกฎของฮุก (Hooke's law) ที่กล่าวว่า “ภายในขอบเขตความยืดหยุ่น (ก็คือการกระจัดมีค่าน้อย ๆ) แรงดึงกลับเป็นสัดส่วนโดยตรงกับการกระจัด” ถ้า x เกินขอบเขตความยืดหยุ่น หรือ x มีค่ามาก ๆ จากสมการ (3.7)

$$F = -kx + \ldots$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง F กับ x จึงไม่เป็นแบบเชิงเส้นตรง (linear) ดังภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 ภายใต้ขอบเขตความยืดหยุ่นแรงดึงกลับ F เป็นสัดส่วนโดยตรงกับการกระจัด x

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สอง

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ก็คือ อันดับของอนุพันธ์สูงสุดของสมการ สมการส่วนใหญ่ทางกลศาสตร์เป็นสมการอันดับที่สอง รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองคือ

$$a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = b(t) \qquad (3.9)$$

ถ้า $b(t) = 0$ เรียกสมการ (3.9) ว่าสมการเอกพันธ์ (homogeneous equation)

ถ้า $b(t) \neq 0$ เรียกสมการ (3.9) ว่าสมการไม่เป็นเอกพันธ์ (inhomogeneous equation)

พิจารณาสมการเอกพันธ์

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0 \qquad (3.10)$$

โดยสัมประสิทธิ์ a_2, a_1 และ a_0 เป็นค่าคงที่ จะเห็นว่าสมการ (3.10) มี 2 ผลเฉลยสมบัติของสมการ (3.10) คือ

1. ถ้า $x = x_1(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$x = C_1x_1(t)$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

เมื่อ C_1 คือค่าคงที่ใด ๆ

2. ถ้า $x = x_2(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$x = C_2x_2(t)$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

เมื่อ C_2 คือค่าคงที่ใด ๆ

3. ถ้า $x = C_1x_1(t)$ และ $x = C_2x_2(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

จะได้ว่า

$$x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \tag{3.11}$$

ก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

สมการ (3.11) เป็นผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการ (3.10)

สมการ (3.10) อาจเขียนได้เป็น

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x \ = \ 0 \tag{3.12}$$

ผลเฉลยของสมการ (3.12) จะอยู่ในรูปแบบ

$$x \ = \ e^{pt}$$

สำหรับสมการอันดับที่สองจะมี 2 ผลเฉลย (2 ราก) เพราะ p มี 2 ค่า

$$x' = pe^{pt}$$

$$x'' = p^2 e^{pt}$$

แทน x'', x' และ x ในสมการ (3.12)

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)e^{pt} \;=\; 0$$

แต่ $e^{pt} \neq 0$ ดังนั้น $$(a_2p^2 + a_1p + a_0) \;=\; 0 \qquad (3.13)$$

ถ้าทราบค่า a_2, a_1 และ a_0 ก็หาค่า p ได้

กรณีที่สมการมีรากทั้งสองเป็นค่าจริงหรือค่าจินตภาพหรือรากทั้งสองเท่ากัน จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.12) แตกต่างกันดังนี้

1. ถ้ารากทั้งสองเป็นค่าจริง (real roots)

ให้ $p = p_1 = p_2$

ดังนั้น $x_1 = e^{p_1 t}, \; x_2 = e^{p_2 t}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.12) คือ

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \qquad (3.14)$$

2. ถ้ารากทั้งสองเป็นค่าจินตภาพ (imaginary roots)

ให้ $p_1 = a+ib, \; p_2 = a-ib$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.12) คือ

$$x = C_1 e^{(a+ib)t} + C_2 e^{(a-ib)t} \qquad (3.15)$$

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน (complex number)

$$C = c+id$$

ขนาดของจำนวนเชิงซ้อน C คือ

$$|C| = |c+id| = \sqrt{(c+id)(c-id)} = \sqrt{c^2+d^2} = r$$

$$C = c+id$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= re^{i\theta} \qquad (3.16)$$

สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) ของ C คือ $C^* = c-id = re^{i\theta}$

ถ้าให้ $C_1 = C,\ C_2 = C^*$ สมการ (3.15) จะเป็น

$$x = e^{at}(Ce^{ibt} + C^*e^{-ibt})$$

$$x = e^{at}(re^{i(bt+\theta)} + re^{-i(bt+\theta)})$$

ให้ $$r = \frac{1}{2}A$$

ดังนั้น $$x = e^{at}\left(\frac{1}{2}Ae^{i(bt+\theta)} + \frac{1}{2}Ae^{-i(bt+\theta)}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}Ae^{at}\left[\cos\left(bt+\theta\right)+i\sin\left(bt+\theta\right)+\cos\left(bt+\theta\right)-i\sin\left(bt+\theta\right)\right]$$

$$x = Ae^{at}\cos(bt+\theta) \qquad (3.17)$$

สมการ (3.17) เป็นผลเฉลยจริง (real solution) ของสมการ (3.12) หรือถ้าผลเฉลยคือ

$$x = C_1 e^{(a+ib)t}$$

$$x = re^{i\theta}e^{(a+ib)t}$$

$$x = re^{at}e^{i(bt+\theta)}$$

และให้ $r = A$ ดังนั้น $x = Ae^{at}\left[\cos(bt+\theta)+i\sin(bt+\theta)\right]$

เพราะว่า x มีทั้งส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) อาจเขียนได้ว่า

$x = u + iv$ โดยทั้งส่วนจริง และส่วนจินตภาพของ x ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (3.12)

ดังนั้นผลเฉลยคือ $x = Ae^{at}\cos(bt+\theta)$ (3.18)

หรือ $x = Ae^{at}\sin(bt+\theta)$

3. ถ้ารากทั้งสองเท่ากัน

ให้ $p_1 = p_2 = p$

ดังนั้น $x = e^{pt}$ เป็นผลเฉลย

และ $x = te^{pt}$ ก็เป็นผลเฉลย

ผลเฉลยทั่วไปคือ $x = C_1 e^{pt} + C_2 t e^{pt}$

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{pt} \quad (3.19)$$

ถ้าประยุกต์วิธีข้างบนกับสมการการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก [สมการ (3.8)]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

ให้ $x = e^{pt}$ จะได้ $mp^2 + k = 0$

$$p = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\sqrt{-1}\,\omega_0 = \pm i\omega_0$$

เมื่อ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบแดมพ์ฮาร์มอนิก

ในเรื่องการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิกของวัตถุผ่านจุดสมดุลเสถียรในหัวข้อ 3.1 สมมุติว่าแรงเสียดทาน (ในที่นี้เรียกว่าแรงหน่วง) มีค่าน้อยมาก แต่ในทางปฏิบัติแรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุไม่เป็นศูนย์

สมการการเคลื่อนที่ใน 1 มิติของวัตถุผ่านจุดสมดุลเสถียรภายใต้การกระทำของแรงดึงกลับ $-kx$ และแรงหน่วง $-bx$ คือ

$$F = -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \qquad (3.20)$$

b เป็นค่าคงที่บวก $\dot{x}$ เป็นลบเพราะมีทิศตรงข้ามกับแรงหน่วง ดังนั้น $-b\dot{x}$ เป็นบวกเสมอ สมการ (3.20) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบแดมพ์ฮาร์มอนิก

ให้ $x = e^{pt}$

สมการ (3.20) จะเป็น $mp^2 + bp + k = 0$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

ให้ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

และสมการ (3.20) เขียนในเทอมของ γ, ω_0 ได้เป็น

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3.21)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่แบ่งได้เป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 การเคลื่อนที่แบบอันเดอร์แดมพ์ (underdamped motion)

ถ้า $\omega_0^2 > \gamma^2$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.21) คือ $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)$

กรณีที่ 2 การเคลื่อนที่แบบโอเวอร์แดมพ์ (overdamped motion)

ถ้า $\gamma^2 > \omega_0^2$ รากทั้งสองจะเป็นค่าจริง

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.21) คือ $x = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$

กรณีที่ 3 การเคลื่อนที่แบบคริทิคอลลีแดมพ์ (critically damped motion)

ถ้า $\gamma^2 = \omega_0^2$ รากทั้งสองจะเท่ากัน

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.21) คือ $x = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$

บทที่ 3
จบแล้วค่ะ

นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทมาส่งด้วยนะคะ