บทที่ 4
การเคลื่อนที่ของวัตถุในสองและสามมิติ

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.ณัฐกฤตา จันทิมา

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

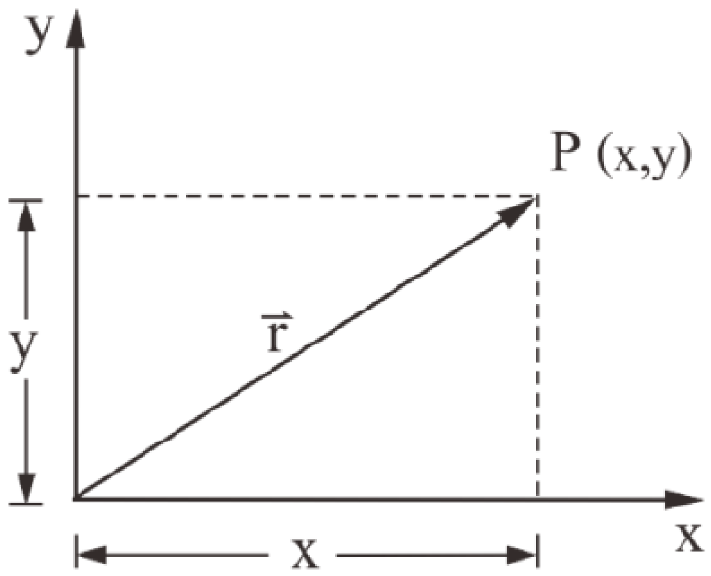
Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

- จลนศาสตร์ในระนาบหรือสองมิติ
- จลนศาสตร์ในสามมิติ
- ทฤษฎีบทโมเมนตัมเชิงมุมในระนาบ
- พลังงานศักย์
- การเคลื่อนที่ภายใต้แรงในแนวศูนย์กลาง

จลนศาสตร์ในระนาบหรือสองมิติ

กำหนดเวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector) ของวัตถุด้วยเวกเตอร์รัศมี (radius vector), $\vec{r}$ โดยลากจากจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก 2 มิติ (โคออร์ดิเนตคาร์ทีเซียน) ถึงตำแหน่งที่วัตถุอยู่ (ดังภาพที่ 4.1)



ภาพที่ 4.1 ระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุจะเป็นฟังก์ชันของเวลา $\vec{r}$ และเขียนได้เป็น

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

หรือ $$x = x(t), \quad y = y(t)$$

ความเร็วและส่วนประกอบของความเร็ว คือ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

เมื่อ $\hat{i}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ในแกน x

$\hat{j}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน y

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

ความเร่งและส่วนประกอบของความเร่งคือ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}$$

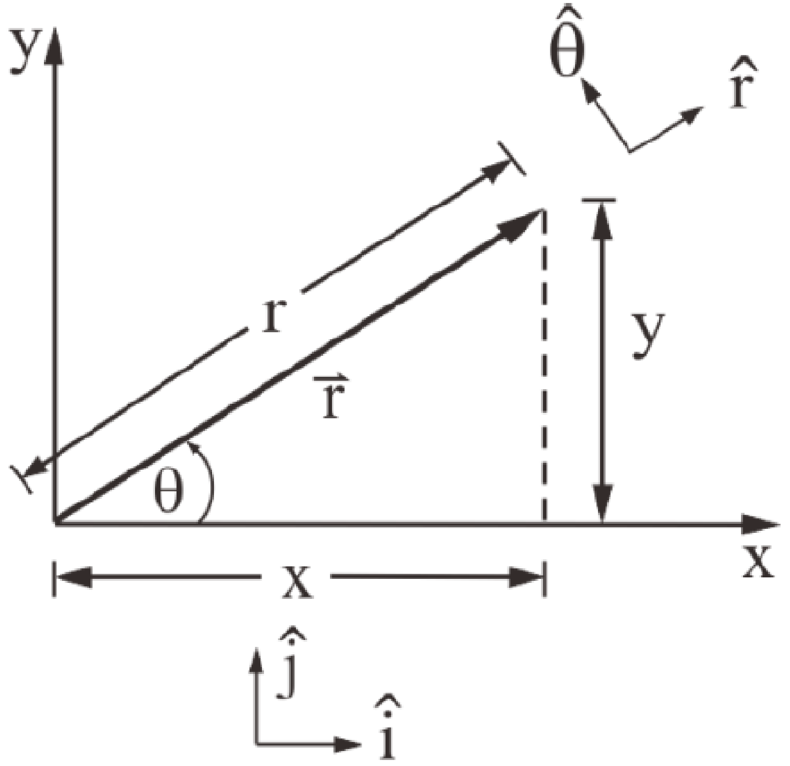
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

ระบบพิกัดเชิงขั้ว (ภาพที่ 4.2) บอกโดย r และ θ มีความสัมพันธ์กับ x และ y ตามสมการ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

และ $$r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin^{-1}\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \cos^{-1}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$



ภาพที่ 4.2 ระบบพิกัดเชิงขั้วในระนาบ

ให้ $\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศการเพิ่มของ r และ θ ตามลำดับ

$\hat{r}$ และ $\hat{\theta}$ สัมพันธ์ $\hat{i}, \hat{j}$ โดยสมการ

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

ในเทอมของระบบพิกัดเชิงขั้วในระนาบ (plane polar coordinates)

$$\hat{r} = r\hat{r}(\theta)$$

ความเร็วของวัตถุในพิกัดเชิงขั้วคือ

$$
\begin{aligned}
\hat{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right) \\
&= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\
&= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นส่วนประกอบของความเร็วในทิศของ $\hat{r}, \hat{\theta}$ คือ

$$
v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (4.1)
$$

ความเร่งของวัตถุ คือ

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) \\
&= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}
\end{aligned}$$

ดังนั้นส่วนประกอบของความเร่งคือ

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{4.2}$$

เทอม $r\dot{\theta}^2 = \frac{v_\theta^2}{r}$ เรียกว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง เกิดจากการเคลื่อนที่ในทิศ θ

ถ้า $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นวงกลม และ $a_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v_\theta^2}{r}$

จลนศาสตร์ในสามมิติ

ระบบพิกัดฉาก (x, y, z)

ตำแหน่ง $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

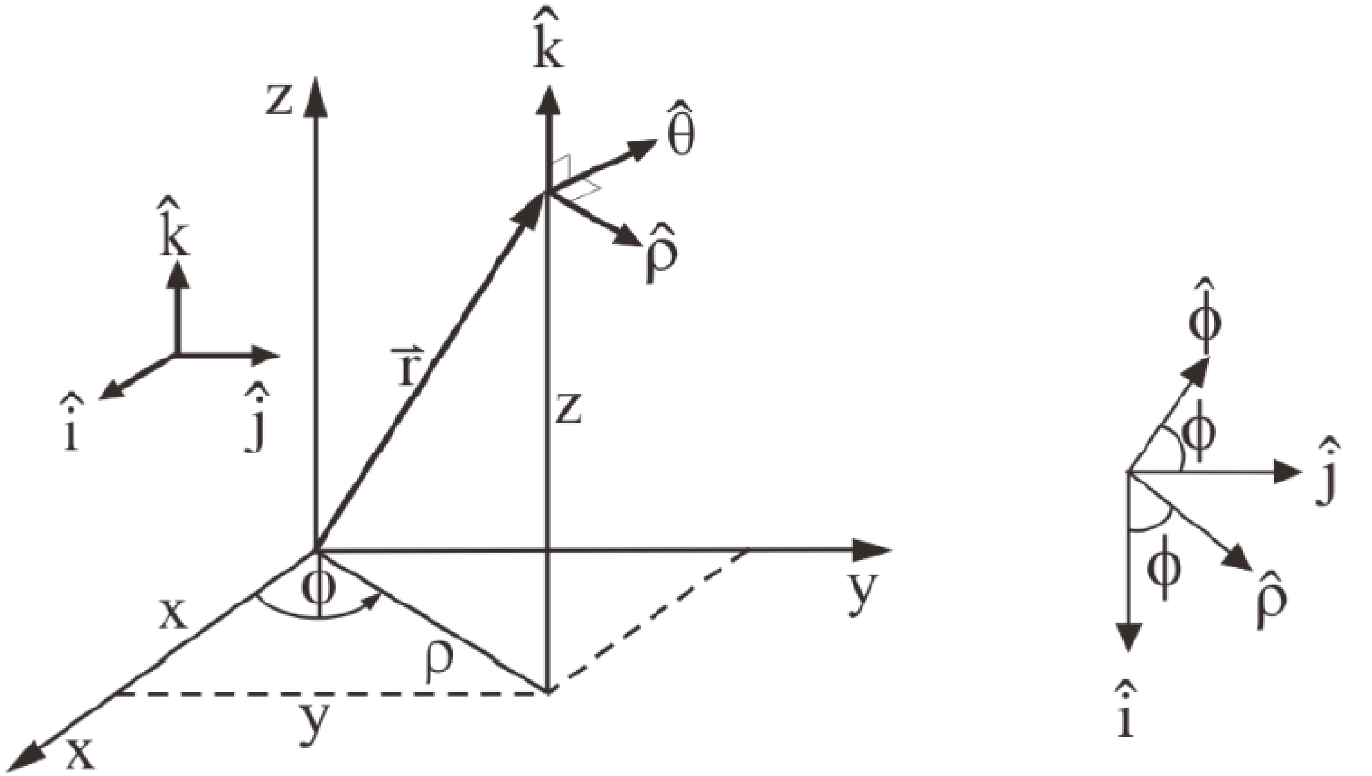
ความเร็ว $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

ความเร่ง $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) ซึ่งสัมพันธ์กับระบบพิกัดฉาก (x, y, z) ดังแสดงในภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.3 ระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกระบอก

จากรูปจะได้ $x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$

$$\rho = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin^{-1}\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \cos^{-1}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$z = z$$

ให้ $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศการเพิ่มของ ρ, φ, z ตามลำดับ $\hat{k}$ คงที่ แต่ $\hat{\rho}$ และ $\hat{\phi}$ เป็นฟังก์ชันของ φ

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i}+\cos\phi\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} = -\sin\phi\hat{i}+\cos\phi\hat{j} = \hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\phi} = -\cos\phi\hat{i} - \sin\phi\hat{j} = -\hat{\rho}$$

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ ในระบบพิกัดทรงกระบอกเขียนได้เป็น

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

ความเร็วและความเร่งคือ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

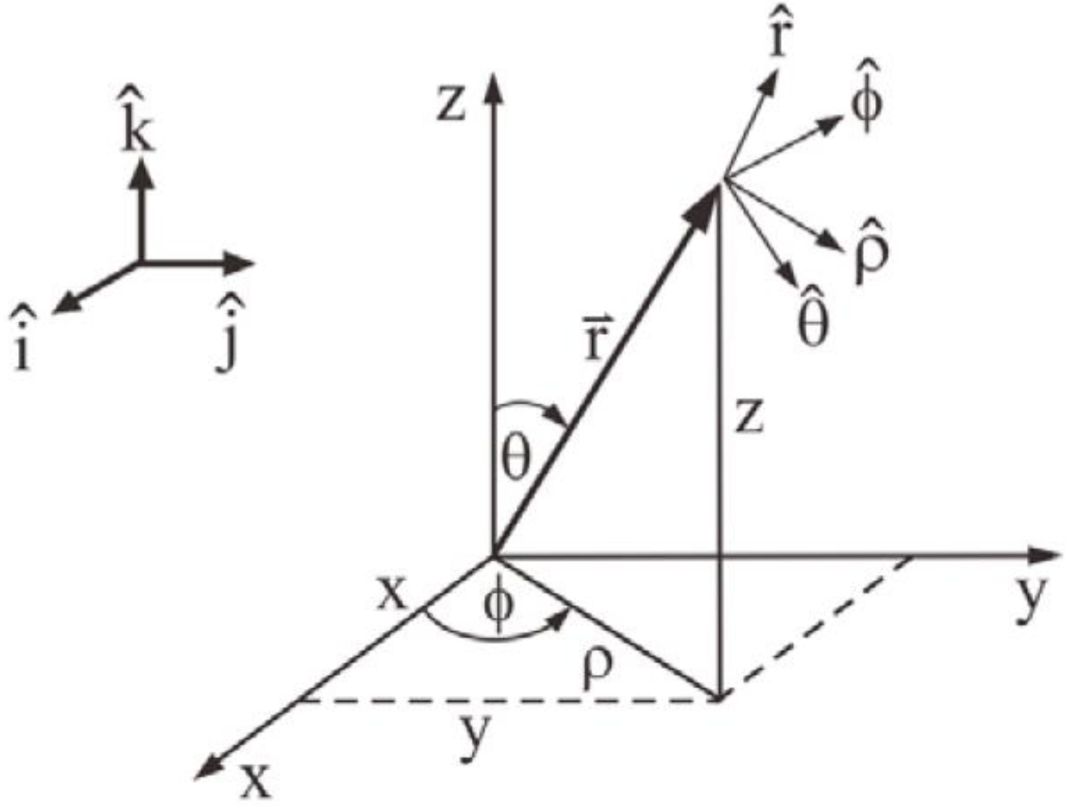
$$= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\phi}\hat{\varphi} + \rho\frac{d\dot{\phi}}{dt}\hat{\varphi} + \rho\dot{\phi}\frac{d\hat{\varphi}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\hat{k}$$

$$= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\varphi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\varphi} - \rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{k}$$

ระบบพิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลม (r, θ, φ) ซึ่งสัมพันธ์กับระบบพิกัดฉาก (x, y, z) ดังแสดงในภาพที่ 4.4



ภาพที่ 4.4 พิกัดเชิงขั้วแบบทรงกลม

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

ในทางกลับกัน

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z} = \tan^{-1}\frac{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{z}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ให้ $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศการเพิ่มของ r, θ, φ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า $\hat{k},\ \hat{\rho},\ \hat{r},\ \hat{\theta}$ อยู่ในระนาบแนวดิ่งเดียวกัน โดยที่

$$
\begin{aligned}
\hat{r} &= \cos\theta\hat{k} + \sin\theta\hat{\rho} \\
&= \cos\theta\hat{k} + \sin\theta\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}\right) \\
\hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{k} + \cos\theta\hat{\rho} \\
&= -\sin\theta\hat{k} + \cos\theta\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}\right) \\
\hat{\phi} &= -\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j} \\
\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} &= -\sin\theta\hat{k} + \cos\theta\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}\right) = \hat{\theta}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin\theta\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\right) = \sin\theta\hat{\phi}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\cos\theta\hat{k} - \sin\theta\left(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}\right) = -\hat{r}$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\left(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\right) = \cos\theta\hat{\phi}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\hat{i} - \sin\varphi\hat{j} = -\hat{\rho} = -\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$$

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ พิกัดทรงกลม เขียนได้เป็น

$$\vec{r} = r\hat{r}(\theta,\varphi)$$

ความเร็วและความเร่งคือ

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\left(\frac{d\hat{r}}{d\theta}\right)_{\varphi}\frac{d\theta}{dt} + r\left(\frac{d\hat{r}}{d\varphi}\right)_{\theta}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

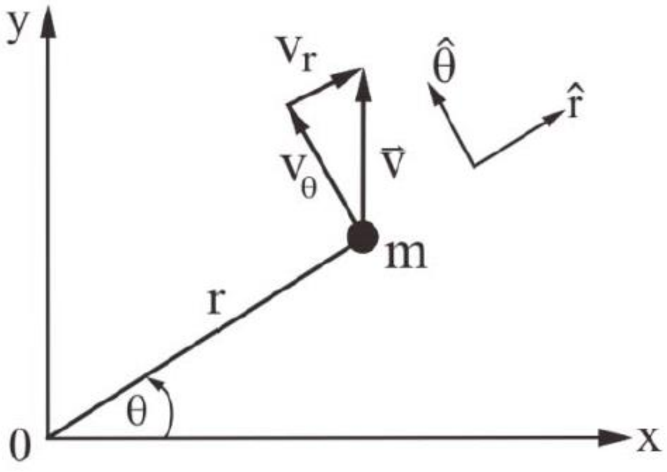
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}$$

$$+\left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\phi}$$

ทฤษฎีบทโมเมนตัมเชิงมุมในระนาบ

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ในระนาบ นิยามโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum, L) ของวัตถุรอบจุดกำเนิด (origin, 0) ว่าเป็นผลคูณของระยะทางของวัตถุจากจุด 0 กับส่วนประกอบของโมเมนตัมซึ่งตั้งฉากกับเส้นที่ลากต่อระหว่างวัตถุกับจุด 0

ให้ m เป็นมวลของวัตถุ $\vec{v}$ เป็นความเร็วของวัตถุ ในเทอมของพิกัดเชิงขั้วในระนาบ โดยมี 0 เป็นจุดกำเนิด โมเมนตัมของวัตถุคือ $m\vec{v}$ และส่วนประกอบของโมเมนตัมที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์รัศมี $\vec{r}$ ที่ลากจาก 0 คือ mv_θ ดังภาพที่ 4.5



ภาพที่ 4.5 ส่วนประกอบของความเร็วในระนาบ

นิยามเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ รอบจุด 0 ว่าเป็นโมเมนต์ของเวกเตอร์ โมเมนตัมเชิงเส้นรอบจุด 0 ดังนั้น

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\left(m\vec{v}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\left(m\vec{v}\right)\\
&= \vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)+\vec{v}\times\left(m\vec{v}\right)\\
&= \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}\\
&= \vec{r}\times\vec{F} = \vec{N}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 อนุภาคมวล m เคลื่อนที่มีตำแหน่งขึ้นกับเวลา (t) ตามสมการ ดังนี้

$x = x_0 + at^2$, $y = bt^3$ และ $z = ct$ เมื่อ a, b และ c คือค่าคงตัว

จงหา (ก) โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่เวลาใด ๆ

(ข) แรงที่กระทำต่ออนุภาค

(ค) จงแสดงให้เห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคนั้น

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคมวล m ตามสมการดังนี้

(ก) $$\vec{r} = \left(x_0 + at^2\right)\hat{i} + bt^3\,\hat{j} + ct\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2at\,\hat{i} + 3bt^2\,\hat{j} + c\,\hat{k}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = 2mat\,\hat{i} + 3mbt^2\,\hat{j} + mc\,\hat{k}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ x_0 + at^2 & bt^3 & ct & x_0 + at^2 & bt^3 \\ 2mat & 3mbt^2 & mc & 2mat & 3mbt^2 \end{array}\right.$$

$$= mbct^3\,\hat{i} + 2mact^2\,\hat{j} + 3x_0mbt^2\,\hat{k} + 3mabt^4\,\hat{k} - 3mbct^3\,\hat{i}$$

$$-x_0mc\,\hat{j} - mact^2\,\hat{j} - 2mabt^4\,\hat{k}$$

$$= -2mbct^3\,\hat{i} + \left(mact^2 - x_0mc\right)\hat{j} + \left(mabt^4 + 3x_0mbt^2\right)\hat{k}$$

(ข) จากนิยามของ $\vec{F} = m\vec{a}$ จะได้ว่า

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2a\hat{i} + 6bt\hat{j}$$

$$\therefore \vec{F} = m\vec{a} = 2ma\hat{i} + 6mbt\hat{j}$$

(ค) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ และ $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$

จากข้อ (ก) จะได้

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -6mbct^2\hat{i} + 2mact\hat{j} + \left(4mabt^3 + 6x_0 mbt\right)\hat{k} \qquad (1)$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 + at^2 & bt^3 & ct \\ 2ma & 6mbt & o \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ x_0 + at^2 & bt^3 \\ 2ma & 6mbt \end{matrix}$$

$$= \quad 0 + 2mact\,\hat{j} + 6x_0 mbt\,\hat{k} + 6mabt^3\,\hat{k} - 6mbct^2\,\hat{i} - 0 - 2mabt^3\,\hat{k}$$

$$= \quad -6mbct^2\,\hat{i} + 2mact\,\hat{j} + \left(4mabt^3 + 6x_0 mbt\right)\hat{k} \qquad (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับทอร์กที่กระทำต่ออนุภาค

พลังงานศักย์

ถ้าแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่อวัตถุเป็นฟังก์ชันของ $\vec{r} = (x, y, z)$ ดังนั้นงานที่ทำโดยแรง $\vec{F}$ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\vec{r}_1$ ไปยังตำแหน่ง $\vec{r}_2$ คือ

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

นิยามพลังงานศักย์ $U(\vec{r})$ ในเทอมของงานดังนี้

$$W_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4.3)$$

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} dU = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

เพราะว่า

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$-\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$-\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\right)$$

$$= \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r}$$

ดังนั้น

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

ส่วนประกอบของ $\vec{F}$ คือ

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{4.4}$$

จาก $$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

และ $$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \tag{4.5}$$

ได้มาจากการสมมุติว่าฟังก์ชันพลังงานศักย์ (potential energy function), U มีได้ (exist) และนิยามโดยสมการ (4.3) ในทางกลับกัน สมการ (4.5) เป็นเงื่อนไขจำเป็นที่ $\vec{F}$ จะต้องสอดคล้องก่อนที่จะสามารถนิยามฟังก์ชันพลังงานศักย์ U ได้ ซึ่งได้แสดงแล้วว่า $\vec{F}$ สอดคล้องกับสมการ (4.5) ก็ต่อเมื่อ $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์

ถ้ากำหนดฟังก์ชันพลังงานศักย์ $U(x,y,z)$ มาให้ก็สามารถ คำนวณหาส่วนประกอบของ $\vec{F}(x,y,z)$ ได้จากสมการ (4.4) ในทางกลับกัน ถ้ากำหนด $\vec{F}(x,y,z)$ มาให้ ต้องคำนวณหาค่า $curl\ \vec{F}$ ก่อน เพื่อจะดูว่าฟังก์ชันพลังงานศักย์ U มีได้หรือไม่ ถ้า $curl\ \vec{F} \neq 0$ **แสดงว่า** U **ไม่มี** ถ้า $curl\ \vec{F} = 0$ **แสดงว่า** U **มีได้** ก็คำนวณหา U ต่อไปได้

ตัวอย่างที่ 4.2 พิจารณาฟังก์ชันของแรง $\vec{F}$

(ก) $F_x = axy, \quad F_y = -az^2, \quad F_z = ax^2$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

(ข) $\vec{F} = \left(ax^3 + bxy^2 + cz\right)\hat{i} + \left(ay^3 + bx^2y\right)\hat{j} + cx\hat{k}$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

จงแสดงว่า $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่ ถ้า $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์ จงหาฟังก์ชันพลังงานศักย์ $U(x,y,z)$

วิธีทำ ก่อนอื่นจะต้องหาว่า $curl\ \vec{F} = 0$ หรือไม่

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

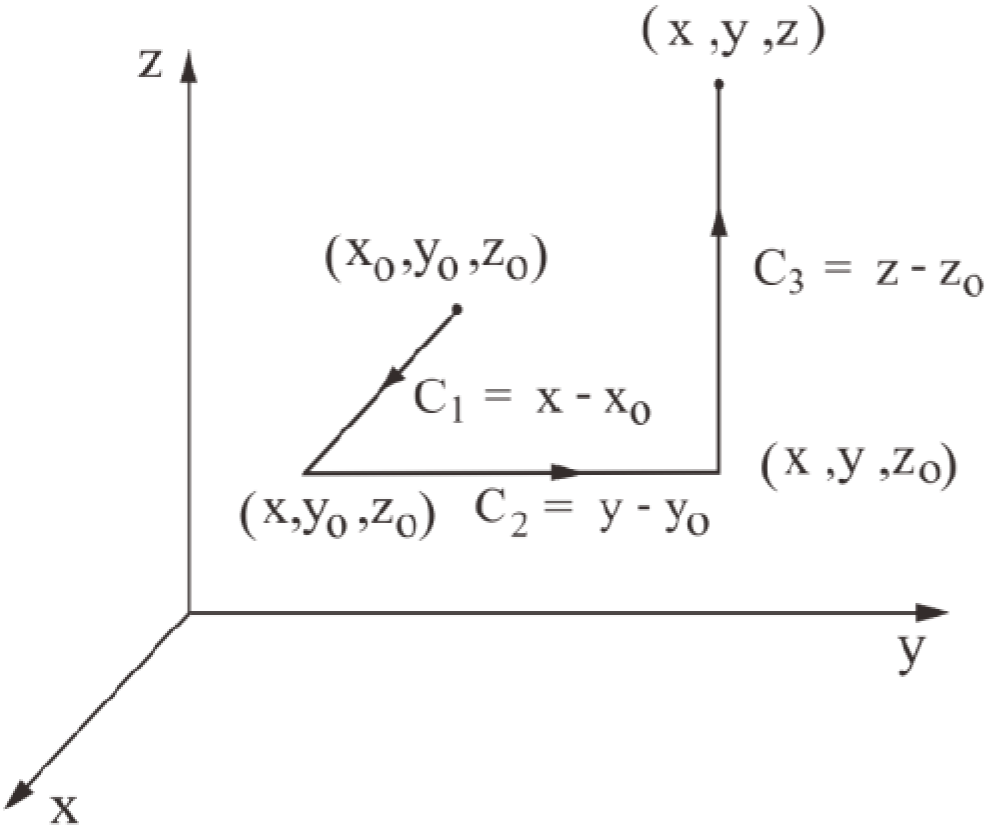
(ก) $F_x = axy, \quad F_y = -az^2, \quad F_z = ax^2$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$= 2az\hat{i} + 2ax\hat{j} - ax\hat{k} \neq 0$$

การที่ $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq 0$ แสดงว่า $\vec{F}$ ไม่เป็นแรงอนุรักษ์ ดังนั้นไม่สามารถหาค่าพลังงานศักย์ U ได้



ภาพประกอบตัวอย่างที่ 4.2 เส้นทางการปริพันธ์จาก (x_0, y_0, z_0) ถึง (x, y, z)

(ข) $F_x = ax^3 + bxy^2 + cz\,,\ F_y = ay^3 + bx^2y\,,\ F_z = cx$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial Fz}{\partial y}-\frac{\partial Fy}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial Fx}{\partial z}-\frac{\partial Fz}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial Fy}{\partial x}-\frac{\partial Fx}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$= 0\hat{i}+(c-c)\hat{j}+(2bxy-2bxy)\hat{k}$$

$$= 0$$

การที่ $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ แสดงว่า $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์ ดังนั้นสามารถหาค่าพลังงานศักย์ U ได้

วิธีหา พลังงานศักย์ U จากแรง $\vec{F}$ ถ้าเดิมวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง (x_0, y_0, z_0) แล้วเคลื่อนที่ไป ยังตำแหน่ง (x, y, z) โดยการกระทำของแรง $\vec{F}$ ดังภาพประกอบตัวอย่างที่ โดยอาศัยสมการ (4.3) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
U_{(x_0, y_0, z_0)} - U_{(x,y,z)} &= \int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= \int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} \left(Fx\,\hat{x} + Fy\,\hat{y} + Fz\,\hat{z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right) \\
&= \int_{x_0}^{x} Fxdx + \int_{y_0}^{y} Fydy + \int_{z_0}^{z} Fzdz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{(x_0,y_0,z_0)} - U_{(x,y,z)} &= \int_{x_0}^{x}\left(ax^3 + bxy_0^2 + cz_0\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(ay^3 + bx^2y\right)dy + \int_{z_0}^{z} cx\,dz \\
&= \left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^2y_0^2}{2} + cxz_0\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + \left(\frac{ay^4}{4} + \frac{bx^2y^2}{2}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} + cxz\Big|_{z_0}^{z} \\
&= \frac{ax^4}{4} - \frac{ax_0^4}{4} + \frac{bx^2y_0^2}{2} - \frac{bx_0^2y_0^2}{2} + cxz_0 - cx_0z_0 + \frac{ay^4}{4} - \frac{ay_0^4}{4} \\
&\quad + \frac{bx^2y^2}{2} - \frac{bx^2y_0^2}{2} + cxz - cxz_0 \\
&= \left[-\frac{ax_0^4}{4} - \frac{ay_0^4}{4} - \frac{bx_0^2y_0^2}{2} - cx_0z_0\right] + \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{ay^4}{4} + \frac{bx^2y^2}{2} + cxz\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $$U_{(x_0,y_0,z_0)} = -\left[\frac{ax_0^4}{4}+\frac{ay_0^4}{4}+\frac{bx_0^2y_0^2}{2}+cx_0z_0\right]$$

$$U_{(x,y,z)} = -\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{ay^4}{4}+\frac{bx^2y^2}{2}+cxz\right]$$

สามารถตรวจสอบค่า U ที่ได้ เพราะทราบแล้วว่า $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

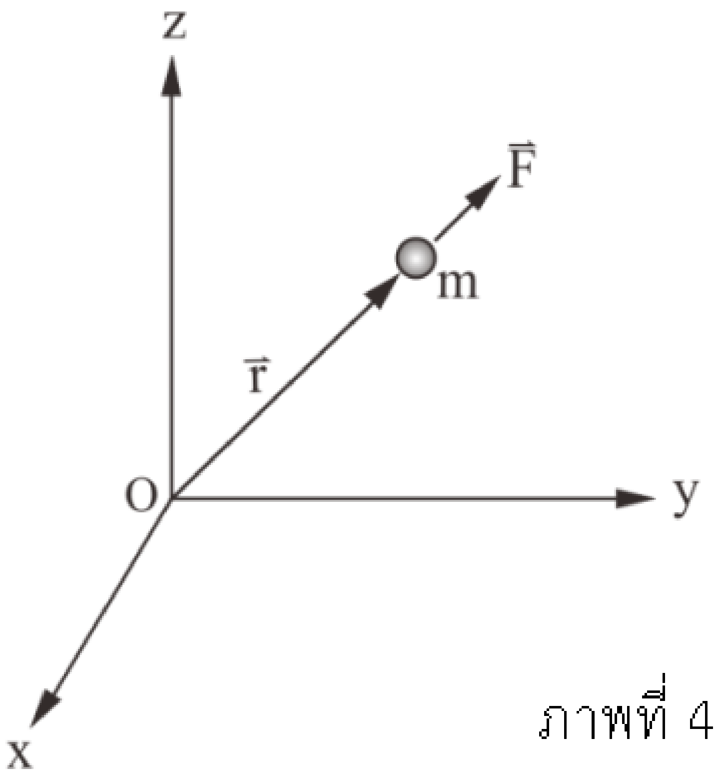
ถ้าลองหาค่า $-\vec{\nabla}U$ แล้วจะต้องได้ค่าเท่ากับ $\vec{F}$ ที่กำหนดให้

การเคลื่อนที่ภายใต้แรงในแนวศูนย์กลาง

สมมติว่ามีแรง $\vec{F}$ แรงหนึ่งกระทำต่อวัตถุ m โดยที่ (ดูภาพที่ 4.6)

1. ทิศทางของแรง $\vec{F}$ ชี้เข้าหาหรือชี้ออกจากจุดตรึง (fixed point), 0

2. ขนาดของแรง $\vec{F}$ ขึ้นกับระยะทาง $\vec{r}$ ซึ่งวัด จาก 0 เท่านั้น



ภาพที่ 4.6 แรงในแนวศูนย์กลางซึ่งกระทำต่อวัตถุมวล m

ในทิศของ $\vec{r}$ แรง $\vec{F}$ นี้เรียกว่า**แรงในแนวศูนย์กลาง** (central force) โดย 0 เป็นจุดศูนย์กลางของแรง ดังนั้นแรงในแนวศูนย์กลางก็คือ แรงดึงดูดเข้าสู่ 0 [ในกรณี $F(r)<0$] หรือแรงผลักออกจาก 0 [ในกรณีที่ $F(r)>0$] ตัวอย่างของแรงในแนวศูนย์กลางแบบดึงดูด เช่น แรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อดาวเคราะห์เนื่องจากดวงอาทิตย์ หรือแรงที่กระทำต่ออิเล็กตรอนเนื่องจากนิวเคลียส ตัวอย่างของแรงในแนวศูนย์กลางแบบผลักออก เช่น แรงระหว่างโปรตอน หรืออนุภาคอัลฟา กับนิวเคลียส

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้สนามของแรงในแนวศูนย์กลาง (central force field) จะมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. เส้นทางหรือวงโคจรของวัตถุจะต้องเป็นเส้นโค้งในระนาบ (plane curve) นั่นคือวัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบ

2. โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ มีค่าคงที่

พิสูจน์ข้อที่ 2 เนื่องจากทอร์กคือ

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times F(r)\hat{n} = F(r)\vec{r}\times\hat{n} = 0$$

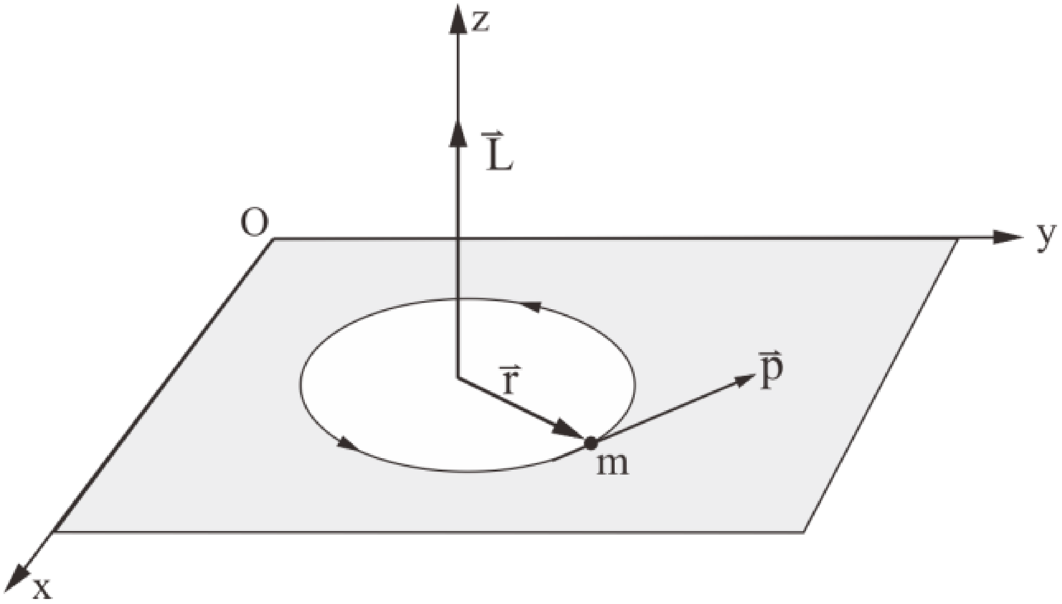
แต่ $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0$$

ดังนั้น $\vec{L}$ คงที่

นั่นคือโมเมนตัมเชิงมุมรอบแกนใด ๆ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางของแรงมีค่าคงที่ พิสูจน์ข้อที่ 1 เพราะว่า $\vec{L}$ มีค่าคงที่

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = \text{ค่าคงที่}$$

ดังนั้น $\vec{r}$ และ $\vec{v}$ จะต้องอยู่ในระนาบซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{L}$ (ดูภาพที่ 4.7)



ภาพที่ 4.7 เวกเตอร์รัศมี $\vec{r}$ และโมเมนตัมเชิงเส้น $\vec{p}$ ของวัตถุอยู่ในระนาบซึ่งตั้งฉากกับโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$

จากสมบัติข้อที่ 1 การเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงในแนวศูนย์กลางจะอยู่ในระนาบ ถ้าให้ระนาบอันนี้เป็นระนาบ xy และพิกัดของวัตถุในระนาบของการเคลื่อนที่เป็นพิกัดเชิงขั้ว $(r,\ \theta)$ ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ในทิศทาง r และ θ [โดยอาศัยสมการ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$]

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r) \qquad (4.6)$$

และ

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (4.7)$$

คูณสมการ (4.7) ด้วย r จะได้

$$m\left(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{ค่าคงที่} \qquad (4.8)$$

สมการ (4.8) เป็น**สมการการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดกำเนิด** ซึ่งก็คือสมบัติข้อที่ 2 ที่พิสูจน์มาแล้วนั่นเอง

อาจแสดงได้ว่า $\vec{\nabla}\times\vec{F}(r) = 0$

ดังนั้น $U(r)$ มีได้ โดย $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

และ $T+U(r) = E = \text{ค่าคงที่}$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = E$$

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) = E$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \qquad (4.9)$$

สามารถเขียน $\dot{r}$ ได้เป็น

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.10)$$

ดังนั้น $$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left[E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^t dt = \sqrt{\frac{2}{m}}\,t \qquad (4.11)$$

สามารถหาตำแหน่งของวัตถุ $r(t)$ ได้จากสมการ (4.11) ซึ่งจะแสดงให้เห็นภายหลัง

จากสมการ (4.8) $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2}$ (4.12)

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{L}{mr^2}dt$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{mr^2}dt \qquad (4.13)$$

ดังนั้นได้หา $r(t)$ และ $\theta(t)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (4.6) และ (4.7) ตามลำดับ

ในการหา $r(t)$ จากสมการ (4.11) จะเห็นว่าในทางปฏิบัติค่อนข้างยาก ดังนั้นแทนที่จะหา r ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t จะหา r ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ θ ซึ่งหาได้ดังนี้

ให้
$$u = \frac{1}{r}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

$$= -\frac{m}{L}\dot{r} \quad \text{[อาศัยสมการ (4.8)]}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m}{L}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{m}{L}\frac{d\dot{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{m}{r^2}\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}}$$

$$= -\frac{m^2}{L^2}r^2\ddot{r} \quad \text{[อาศัยสมการ (4.8)]}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

จากสมการ (4.8) จะได้ $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{Lu^2}{m}$

ดังนั้น $r\dot{\theta}^2 = \frac{L^2u^3}{m^2}$

แทนค่า $\ddot{r}$ และ $r\dot{\theta}^2$ ในสมการ (4.6)

$$m\left(-\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{L^2u^3}{m^2}\right) = F(r)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = -\frac{m}{L^2u^2}F(r) \tag{4.14}$$

จากสมการ (4.14) จะได้ u (หรือ r) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ θ นั่นคือสามารถบอกวงโคจรของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรงในแนวศูนย์กลาง $F(r)\hat{n}$ ได้ ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดวงโคจรของวัตถุในพิกัดเชิงขั้ว $r(\theta)$ ให้ ก็หาขนาดของแรง $F(\theta)$ ที่กระทำต่อวัตถุได้จากสมการ (4.14) ในกรณีพิเศษ, สำหรับ $L=0$ สมการ (4.14) ใช้ไม่ได้ จากสมการ (4.8) $mr^2\dot{\theta}=L=0$ แต่ $m\neq 0,\ r\neq 0$ นั่นคือ $\dot{\theta}=0$ หรือ $\theta=$ ค่าคงที่ หมายความว่าวงโคจรหรือทางเดินของวัตถุจะต้องเป็นเส้นตรงผ่านจุดกำเนิดของแรง

สมมติแรงในแนวศูนย์กลางขึ้นกับกำลังค่าหนึ่งของระยะทางจากจุดศูนย์กลางของแรงเขียนได้

$$F(r) = kr^n$$

ในเมื่อ k เป็นค่าคงที่ ถ้า $n=1$ แรงในแนวศูนย์กลาง $F(r)=kr$ ก็คือในกรณีของออสซิลเลเตอร์ที่มีการแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก ซึ่งได้กล่าวในรายละเอียดมาแล้วนั่นเอง สำหรับ $n=-2$ ก็คือในกรณีของแรงในแนวศูนย์กลางที่เป็นสัดส่วนกลับกับกำลังสองของระยะทาง เช่น แรงโน้มถ่วง (gravitational force) และแรงคูลอมบ์ (Coulomb force) เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 4.3 วัตถุมวล m กำลังเคลื่อนที่และถูกสังเกตว่ามีวงโคจรเป็นรูปเกลียว (spiral orbit) ซึ่งบอกได้ด้วยสมการ $r = k\theta$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีวงโคจรเช่นนั้นภายใต้การกระทำของแรงในแนวศูนย์กลาง $(F(r))$ ถ้าเป็นไปได้ จงหาแรง $F(r)$

วิธีทำ จากสมการ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = -\frac{m}{L^2u^2}F(r) \qquad (1)$$

โดยที่

$$u = \frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{1}{r} = \frac{1}{k\theta} \qquad (2)$$

โดยการหาอนุพันธ์ (differentiate) สมการ (4.92) เทียบกับ θ 2 ครั้ง จะได้

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{k\theta^2}, \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2}{k\theta^3} = \frac{2k^2}{r^3} = 2k^2u^3$$

แทนในสมการ (1) จะได้

$$2k^2u^3 + u = -\frac{m}{L^2u^2}F(r)$$

$$F(r) = -\frac{L^2}{m}\left(u^3 + 2k^2u^5\right) = -\frac{L^2}{m}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{2k^2}{r^5}\right)$$

ซึ่งจะเห็นว่า แรงที่กระทำต่อวัตถุ เป็นแรงในแนวศูนย์กลาง โดยเป็นผลรวมของแรงซึ่งเป็นสัดส่วนกลับกับกำลังสามและกำลังห้าของระยะทางจากจุดศูนย์กลาง และแรงนี้สามารถทำให้เกิดวงโคจรแบบพิเศษดังกล่าวได้

บทที่ 4

จบแล้วค่ะ

นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทมาส่งด้วยนะคะ