บทที่ 5
การเคลื่อนที่ของระบบวัตถุ

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.ณัฐกฤตา จันทิมา

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

- หลักการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้นและจุดศูนย์กลางมวล
- หลักการอนุรักษ์ของพลังงาน
- ระบบที่มี 2 วัตถุ
- ระบบสองอนุภาคในพิกัดของจุดศูนย์กลางมวล

หลักการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงเส้นและจุดศูนย์กลางมวล

สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุตัวที่ i จากทฤษฎีนิวตัน

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = m_i \vec{a}_i$$

เมื่อ $\vec{F}_{ij}^{\text{int}}$ = แรงภายในที่กระทำต่อวัตถุตัวที่ i เนื่องจากวัตถุตัวที่ j

$\sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}^{\text{int}}$ = แรงภายในทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุตัวที่ i เนื่องจากวัตถุอื่น ๆ $(n-1)$ ตัว

$\vec{F}_i^{ext}$ = แรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุต่อที่ i

หลักการอนุรักษ์ของพลังงาน

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}^{\text{int}}$$

งานที่ทำโดยแรง $\vec{F}_i$ ในการทำให้วัตถุตัวที่ i มวล m_i เคลื่อนที่เป็นระยะ $\Delta\vec{r}_i$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} \cdot \Delta\vec{r}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

$$= \Delta T$$

โดย $$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

หลักการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุม

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

ทอร์กรวมเนื่องจากแรงภายในเป็นศูนย์ สมการด้านบนจะเป็น

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)$$

หรือ

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

เมื่อ $\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$ = ทอร์กรวมที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำต่อระบบ

และ $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ = โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบ

สมการการเคลื่อนที่ของโมเมตัมเชิงมุมรวม และถ้าไม่มีทอร์กภายนอกกระทำต่อระบบจะได้

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

หรือ $\vec{L} =$ ค่าคงที่

นั่นคือโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบวัตถุคงที่ซึ่งเป็นการอนุรักษ์ของโมเมนตัมเชิงมุม

ระบบที่มี 2 วัตถุ

พลังงานจลน์รวม $$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

โมเมนตัมเชิงมุมรวม $$\vec{L} = \left(\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1\right) + \left(\vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2\right)$$

$$= m_1\left(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1\right) + m_2\left(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2\right)$$

$$= M\left(\vec{R} \times \vec{V}\right) + \mu\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)$$

โมเมนตัมเชิงเส้นรวม $$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V}$$

สมการนี้ ไม่มีเทอม $\mu\vec{v}$ หมายความว่าโมเมนตัมเชิงเส้นภายในของระบบวัตถุเป็นศูนย์

ระบบสองอนุภาคในพิกัดของจุดศูนย์กลางมวล

โมเมนตัมเชิงเส้นรวมของระบบ $\vec{P}$ เป็นไปตามสมการ ดังนี้

$$\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = M\dot{\vec{R}}$$

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบ $\vec{L}$ เป็นไปตามสมการ ดังนี้

$$\vec{L} = m_1\left(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1\right) + m_2\left(\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2\right)$$

พลังงานจลน์ของระบบ K เป็นไปตามสมการ ดังนี้

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

ตัวอย่างที่ 5.1 พิจารณาระบบอนุภาคที่ประกอบด้วย 3 อนุภาคมีเวกเตอร์ตำแหน่งดังสมการ

$m_1 = 1$ กิโลกรัม $\vec{r}_1 = 2t^2\,\hat{i} + 3t\,\hat{j} + 4\hat{k}$

$m_2 = 3$ กิโลกรัม $\vec{r}_2 = \left(t^2+1\right)\hat{i} + (5t+2)\,\hat{j}$

$m_3 = 5$ กิโลกรัม $\vec{r}_3 = \left(2t^2+1\right)\hat{i} + 4t^2\hat{k}$

จงคำนวณหาค่าต่าง ๆ ของระบบที่เวลา $t = 10$ วินาที ดังนี้

(ก) ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล

(ข) ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

(ค) โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ

(ง) พลังงานจลน์ของระบบ

วิธีทำ (ก) จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล จะได้ว่า

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3\right)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{9}\left[\left(15t^2+8\right)\hat{i} + \left(18t+6\right)\hat{j} + \left(20t^2+4\right)\hat{k}\right]$$

$t = 10$ วินาที ; $$\vec{R} = \frac{1}{9}\left(1508\hat{i} + 186\hat{j} + 2004\hat{k}\right)$$

(ข) จากโจทย์จะได้ว่า

$$\vec{v}_1 = 4t\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{v}_2 = 2t\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{v}_3 = 4t\hat{i} + 8t\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{V} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left[30t\hat{i} + 18\hat{j} + 40t\hat{k}\right]$$

$t = 10$ วินาที ; $\vec{V} = \frac{1}{9}\left(300\hat{i} + 18\hat{j} + 400\hat{k}\right)$

(ค) โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ $(\vec{P})$ เป็นไปตามสมการดังนี้

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

$$= \frac{9}{9}\left(300\hat{i} + 18\hat{j} + 400\hat{k}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{P} = 300\hat{i} + 18\hat{j} + 400\hat{k}$$

(ง) พลังงานจลน์ของระบบ (E_k) เป็นไปตามสมการดังนี้

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(16t^2 + 9\right) + \frac{3}{2}\left(4t^2 + 25\right) + \frac{5}{2}\left(16t^2 + 64t^2\right)$$

$t = 10$ วินาที ; $E_k = \frac{1609}{2} + \frac{1275}{2} + \frac{40000}{2}$

$$= 21442 \text{ จูล}$$

บทที่ 5
จบแล้วค่ะ

นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทมาส่งด้วยนะคะ