บทที่ 6
วัตถุแข็งเกร็ง

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.ณัฐกฤตา จันทิมา

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

- จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง
- โมเมนต์ของความเฉื่อย

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง

สำหรับระบบที่มีมวลแต่ละมวลอยู่แยกกัน จะได้มวลรวม

$$M = \sum m_i$$

สำหรับวัตถุแข็งเกร็ง ถือว่ามวลกระจายอยู่อย่างต่อเนื่องเป็นก้อนเดียวกัน

ดังนั้น $M = \sum m_i$ จะถูกแทนด้วย $\int dm$

$$= \int_V \rho dV$$

ในเมื่อ dm คือ มวลของปริมาตรน้อย ๆ dV

และนิยาม $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ = ความหนาแน่นของวัตถุ

ถ้า $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งนิยามโดยสมการ

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}}{M}$$

สำหรับวัตถุแข็งเกร็ง เครื่องหมายซิกม่า (Σ) อาจเขียนแทนด้วยเครื่องหมายปริพันธ์ ดังนั้น จุดศูนย์กลางมวล $\vec{R}(X,Y,Z)$ คือ

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

$$= \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho\,dV$$

ในเมื่อ $M =$ มวลรวมของวัตถุแข็งเกร็ง

ถ้าวัตถุแข็งเกร็ง อยู่ในรูปของ**แผ่นบาง** (thin sheet) สมการของจุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ในรูปของสมการ

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\sigma\, dA$$

ในเมื่อ σ คือความหนาแน่นพื้นผิว (surface density) หรือมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่, dA คือพื้นที่เล็กๆ และมวลรวม M หาได้จาก

$$M = \int \sigma\, dA$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าวัตถุแข็งเกร็งอยู่ในรูปของ**เส้นลวดบาง** (thin wire) สมการของจุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ในรูปของสมการ

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\lambda\, d\ell$$

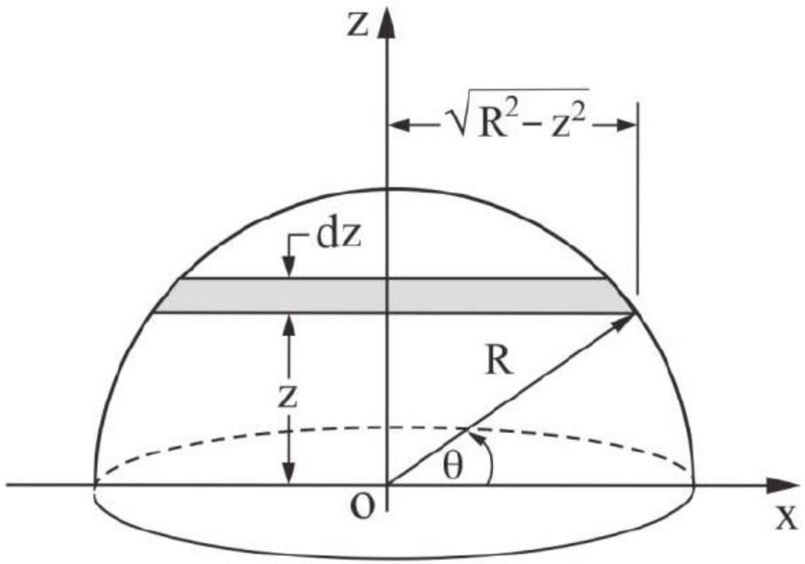
ในเมื่อ λ คือความหนาแน่นเชิงเส้น (linear density) หรือมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว, $d\ell$ คือความยาวน้อย ๆ และมวลรวม M หาได้จาก $M = \int \lambda\, d\ell$

จุดศูนย์กลางมวลของครึ่งทรงกลมตัน

(ก) ครึ่งทรงกลมตันซึ่งมีรัศมี R และความหนาแน่น ρ ดังภาพที่ 6.1 มวลของครึ่งทรงกลมตัน

$$M = \frac{2\pi}{3}R^3\rho$$

จากความสมมาตรของครึ่งทรงกลมตัน เราทราบว่าจุดศูนย์กลางมวลต้องอยู่ในแนวรัศมีและตั้งฉากกับระนาบของผิวหน้า ซึ่งจากภาพ 6.1 ก็คืออยู่บนแกน z นั่นเอง



ภาพที่ 6.1 จุดศูนย์กลางมวลของครึ่งทรงกลมตัน

จากภาพที่ 6.1 $dV = \pi(R^2 - z^2)dz$

ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลในแกน z คือ

$$Z = \frac{\int_0^R z\rho dV}{\int_0^R \rho dV}$$

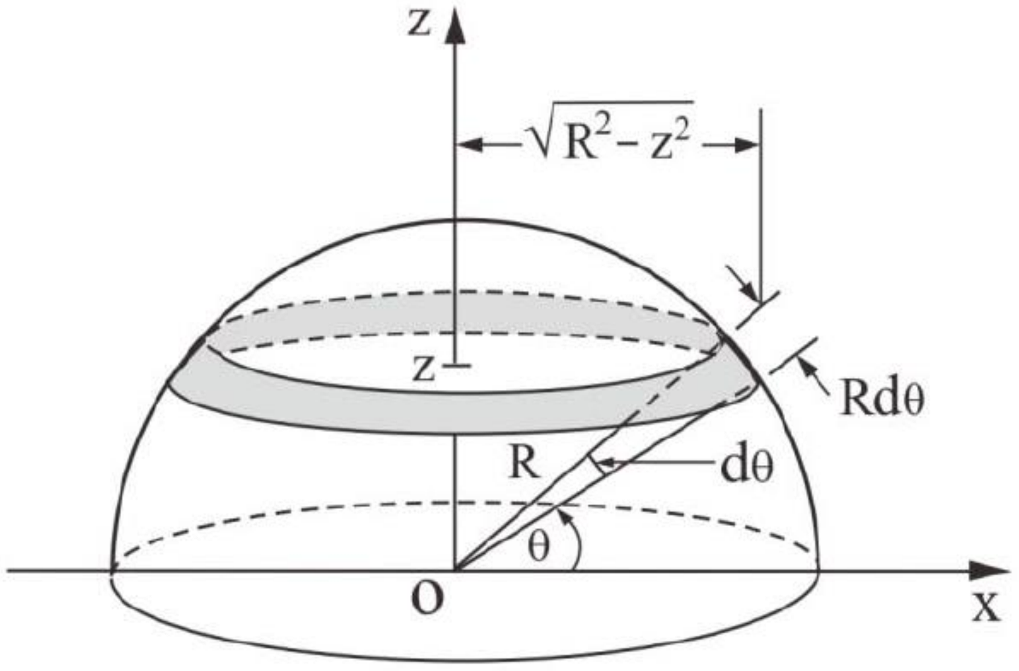
$$= \frac{\int_0^R z\rho\pi(R^2 - z^2)dz}{\int_0^R \rho\pi(R^2 - z^2)dz}$$

$$= \frac{3}{8}R$$

จุดศูนย์กลางมวลของครึ่งทรงกลมบาง

(ข) ครึ่งทรงกลมบางซึ่งมีรัศมี R และความหนาแน่น σ ดังภาพที่ 6.2

ดังนั้น $\sigma = \dfrac{M}{A} = \dfrac{M}{2\pi R^2}$



ภาพที่ 6.2 จุดศูนย์กลางมวลของครึ่งทรงกลมบาง

จากภาพที่ 6.2 $dA = 2\pi(R^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} Rd\theta$

$$z = R\sin\theta, \quad dz = R\cos\theta d\theta$$

$$d\theta = \frac{dz}{R\cos\theta} = \frac{dz}{\left(R^2 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

แทน $d\theta$ จะได้ $dA = 2\pi Rdz$

ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลในแกน z คือ

$$Z = \frac{\int z\sigma dA}{\int \sigma dA}$$

$$= \frac{\int_0^R z\sigma 2\pi Rdz}{\int_0^R \sigma 2\pi Rdz}$$

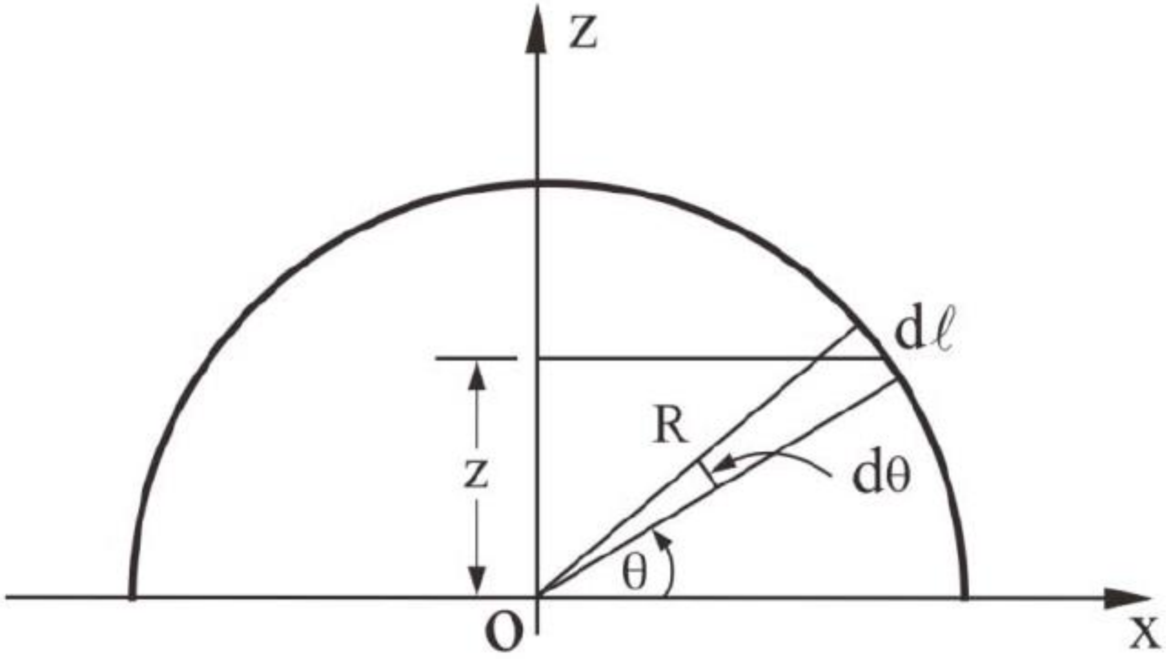
$$= \frac{1}{2}R$$

จุดศูนย์กลางมวลของลวดครึ่งทรงกลม

(ค) ลวดซึ่งโค้งเป็นรูปครึ่งวงกลม รัศมี R และมีความหนาแน่น λ ดังภาพที่ 6.3

ดังนั้น

$$\lambda = \frac{M}{\pi R}$$



ภาพที่ 6.3 จุดศูนย์กลางมวลของลวดครึ่งทรงกลม

จากภาพที่ 6.3 $d\ell = Rd\theta$

$$z = R\sin\theta$$

ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลในแกน z คือ

$$Z = \frac{\int z\lambda d\ell}{\int \lambda d\ell}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} (R\sin\theta)Rd\theta}{\int_0^{\pi} Rd\theta}$$

$$= \frac{2}{\pi}R$$

โมเมนต์ของความเฉื่อย

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

เมื่อ $\hat{\ell}$ เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับแกน z

$\vec{r}_{i'}$ เป็นตำแหน่งของมวล m_i เทียบกับจุดศูนย์กลางมวล

$\vec{r}_i$ เป็นตำแหน่งของมวล m_i เทียบกับแกน z

สำหรับวัตถุแข็งเกร็งซึ่งมีมวลกระจายอย่างต่อเนื่องเป็นเนื้อเดียวกัน โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนหมุนใด ๆ หาได้จาก

$$I = \int r^2 dm \qquad (6.1)$$

ในเมื่อ r เป็นระยะทางตั้งฉากจากแกนหมุนถึงมวล dm

กรณี วัตถุมีรูปร่างเป็น 1 มิติ (เช่นเส้นลวด) และมีมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวเท่ากับ λ

วัตถุมีรูปรางเป็น 2 มิติ (เช่นเป็นแผ่นบาง) และมีมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่เท่ากับ σ

วัตถุมีรูปร่างเป็น 3 มิติ (เช่นทรงกลมตัน) และมีมวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรเท่ากับ ρ

จะมีโมเมนต์ของความเฉื่อยตามลำดับ ดังนี้

$$I = \int r^2 \lambda d\ell$$

$$I = \int r^2 \sigma dA$$

$$I = \int r^2 \rho dV$$

เมื่อ $d\ell$ เป็นความยาวน้อย ๆ (length element)

dA เป็นพื้นที่น้อย ๆ (area element)

dV เป็นปริมาตรน้อย ๆ (volume element)

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง

สมการของจุดศูนย์กลางมวล

มวลรวม M

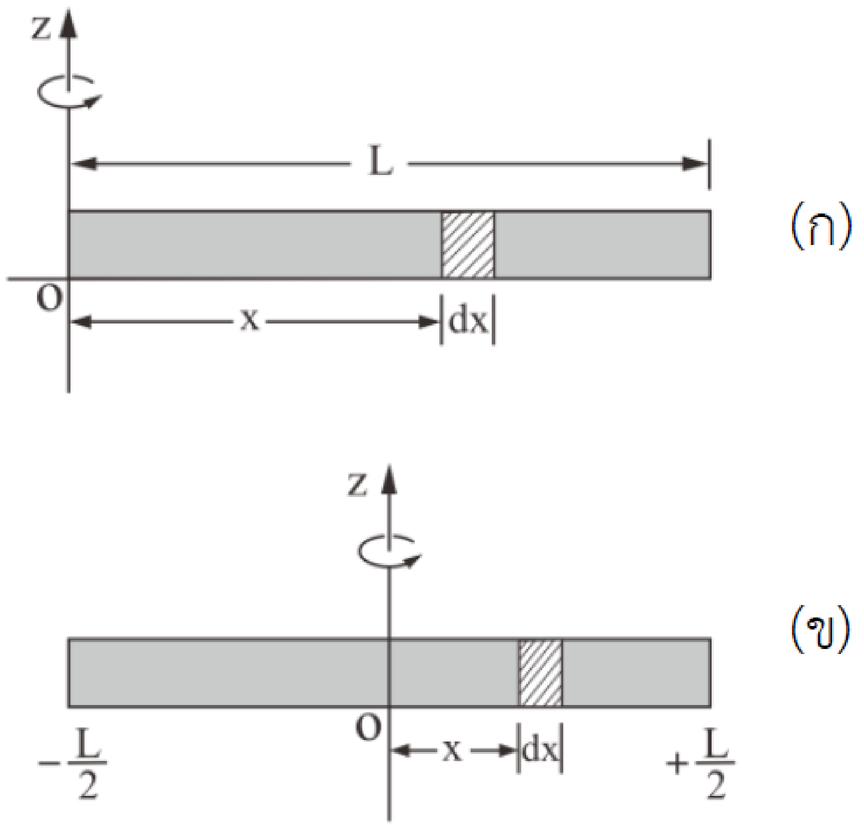
$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\lambda\, dl \qquad M = \int \lambda\, dl$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\sigma\, dA \qquad M = \int \sigma\, dA$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho\, dV \qquad M = \int \rho\, dV$$

เมื่อ $\vec{R}_{CM}$ เป็นจุดศูนย์กลางมวล (X, Y, Z)

ตัวอย่างที่ 6.1 จงคำนวณหาโมเมนต์ของความเฉื่อยของแท่งวัตถุบาง



ภาพที่ 6.4 แท่งวัตถุบาง (ก) ตั้งฉากกับปลายข้างหนึ่งของแท่งวัตถุ และ (ข) ตั้งฉากและผ่านจุดกึ่งกลางของแท่งวัตถุ

วิธีทำ พิจารณาแท่งวัตถุบางซึ่งมีความยาว L และมวล M ดังนั้นจะมีมวลต่อหน่วยความยาว $\lambda = \frac{M}{L}$ ต้องการหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับปลายข้างหนึ่งของแท่งวัตถุ ดังภาพที่ 6.4 (ก)

จากสมการ (6.1)

$$I_z = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3}L^3\lambda = \frac{1}{3}ML^2$$

หาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนซึ่งตั้งฉากและผ่านจุดกึ่งกลางของแท่งวัตถุ ดังภาพที่ 6.4 (ข)

จะได้ว่า

$$I_{cm} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{\lambda}{3}x^3\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{12}L^3\lambda = \frac{1}{12}ML^2$$

หรืออาจคำนวณจากกฎของแกนขนาน จะได้ว่า

$$I_z = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} I_{cm} &= I_z - \frac{1}{4}ML^2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 \\ &= \frac{1}{12}ML^2 \end{aligned}$$

บทที่ 6
จบแล้วค่ะ

นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทมาส่งด้วยนะคะ