บทที่ 7
สมการของลากรองจ์และหลักของแฮมิลตันเบื้องต้น

ผู้สอน

อาจารย์ ดร.ณัฐกฤตา จันทิมา

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

- หลักการของแฮมิลตัน
- โมเมนต์ของความเฉื่อย
- ฟังก์ชันแฮมิลโทเนียน

หลักการของแฮมิลตัน

หลักของแฮมิลตัน สำหรับระบบอนุรักษ์ กล่าวว่า “ระบบจะเคลื่อนที่ระหว่างเวลา t_1 ถึง t_2 ในลักษณะที่จะทำให้อินทิกรัลเชิงเส้น”

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \qquad (7.1)$$

เป็นค่าสุดขีด (extremum) สำหรับเส้นทางการเคลื่อนที่

ในเมื่อ $$L = L(q_1, q_2, \ldots q_n, \ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n, t)$$

$$= T - U$$

โดยที่ q คือ ระบบพิกัดทั่วไป (generalized coordinate)

$\dot{q}$ คือ ความเร็วทั่วไป (generalized velocity)

T คือ พลังงานจลน์

U คือ พลังงานศักย์

เช่น ในระบบพิกัดเชิงขั้ว polar coordinates (r, θ)

q_1 ก็คือ r , q_2 ก็คือ θ

ในระบบพิกัดทรงกระบอก Cylindrical coordinates (ρ, φ, z)

q_1 ก็คือ ρ , q_2 ก็คือ φ , q_3 ก็คือ z

นิยามฟังก์ชันของลากรองเจียน (Lagrangian, L) คือความแตกต่างระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ นั่นคือ

$$L = T - U \text{ หรือ } L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$$

สิ่งสำคัญที่ต้องทราบคือ ถ้าพลังงานศักย์ U เป็นฟังก์ชันของระบบพิกัดทั่วไปและไม่มีความเร็ว จะได้

$$U = U(q) \text{ และ } \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

อาจเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T - U) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(T-U) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

แทนค่าลงในสมการ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

จะได้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

คือสมการลากรองจ์ที่อธิบายถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแรงอนุรักษ์

ตัวอย่างที่ 7.1 จงหาสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ใน 1 มิติ

วิธีทำ ใน 1 มิติ เลือกใช้ระบบพิกัด x

พลังงานจลน์, $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

พลังงานศักย์, $U = \frac{1}{2}kx^2$

ดังนั้น $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

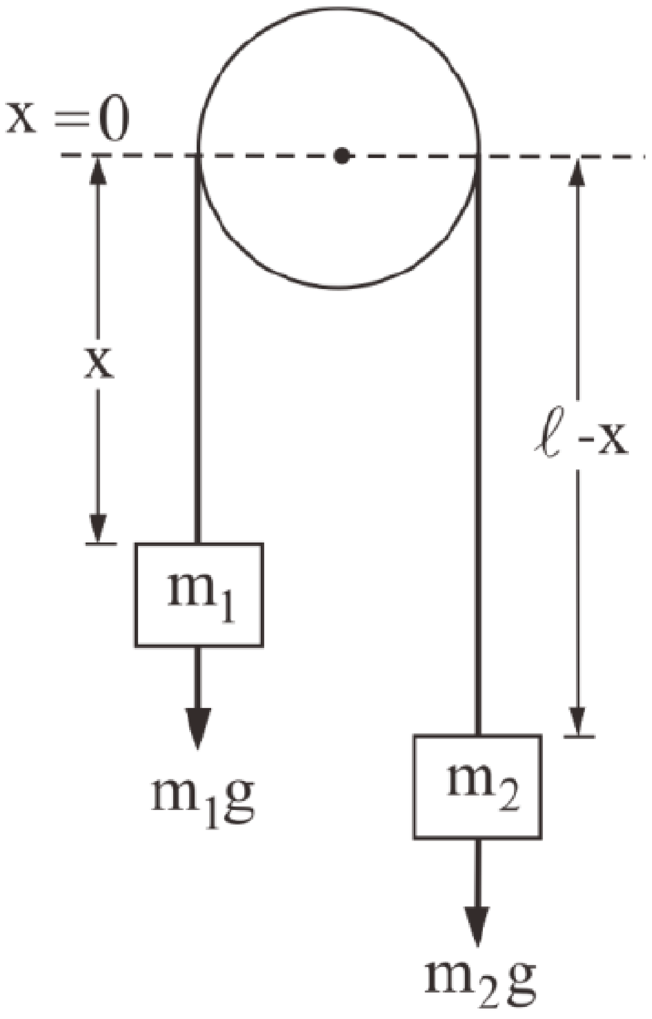
จากสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ดังนั้นจะได้ $m\ddot{x} + kx = 0$

ซึ่งเหมือนกับสมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหาสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์ของเครื่องจักรของแอทวูด (Atwood's machine)



ภาพประกอบตัวอย่างที่ 7.2 เครื่องจักรของแอทวูด

วิธีทำ ให้ ℓ เป็นความยาวของเชือกจาก m_1 ถึง m_2 ขณะใดๆ ให้ x เป็นตำแหน่งของ m_1 เทียบกับรอก ดังนั้น $\ell - x$ เป็นตำแหน่ง m_2 เทียบกับรอก คิดรอกมีขนาดเล็กมาก ๆ)

$$U = \text{พลังงานศักย์ของ } m_1 + \text{ พลังงานศักย์ของ } m_2$$

$$= -m_1 g x - m_2 g(\ell - x)$$

(ตำแหน่งที่ต่ำกว่า $x = 0$ มีพลังงานศักย์เป็นลบ)

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\ell} - \dot{x})^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \qquad (\dot{\ell} = 0)$$

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g(\ell - x) \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= (m_1 + m_2) g \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2)\dot{x} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= (m_1 + m_2)\ddot{x}
\end{aligned}
$$

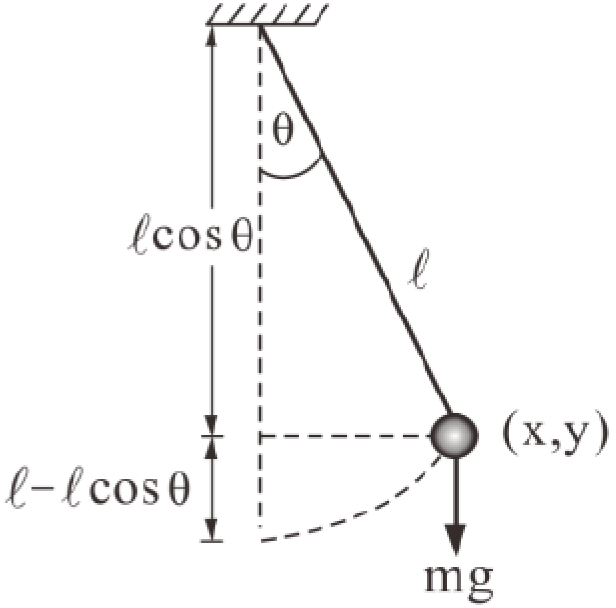
ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่คือ

$$
(m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 - m_2) g = 0
$$

หรือ

$$
\ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g
$$

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์ของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย (simple pendulum)



ภาพประกอบตัวอย่างที่ 7.3 ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย

วิธีทำ $$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

$$x = \ell\cos\theta \quad \text{จะได้} \quad \dot{x} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

$$y = \ell\sin\theta \quad \text{จะได้} \quad \dot{y} = \ell\dot{\theta}\cos\theta$$

ดังนั้น $$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$U = mg\ell\left(1-\cos\theta\right)$$ (ให้ $U = 0$ ที่ตำแหน่งสมดุล)

$$L = T-U = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mg^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ell^2\ddot{\theta}$$

สมการการเคลื่อนที่คือ

$$mg^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

หรือ $$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

ฟังก์ชันแฮมิลโทเนียน

$$\text{จาก} \quad L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}d\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}d\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}d\dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ ถ้า } L \neq L(t)$$

จากสมการของลากรองจ์ จะได้ $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$

แทนค่า $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ ลงในสมการข้างต้น

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left[\dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

จะได้ $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0$

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

$\dfrac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow$ H เป็นค่าคงตัวของการเคลื่อนที่

H เรียกว่า แฮมิลโทเนียน (Hamiltonian)

โมเมนตัมทั่วไป (generalized momentum, p_i)

พิจารณาการเคลื่อนที่ใน 1 มิติ เช่น harmonic oscillator ใน 1 มิติ

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(T-U) = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

จาก $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

ถ้าเขียนในรูประบบพิกัดทั่วไป

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$$ หรือ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ เรียก p_i ว่าโมเมนตัมทั่วไป

จากสมการ $$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

จะได้ $$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$

แฮมิลโทเนียน (Hamiltonian) จะอยู่ในรูปของฟังก์ชัน (q_i, p_i, t) ในขณะที่ลากรองเจียน (Lagrangian) จะอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$H = H(q_i, p_i, t) \quad , \quad L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

แทน $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ ลงในสมการของลากรองจ์ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

จะได้ $$\frac{d}{dt} p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ หรือ } \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

ตัวอย่างที่ 7.4 วัตถุมวล m ถูกดึงสู่จุดที่กำหนดให้โดยแรงที่มีขนาด $\dfrac{k}{r^2}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

(ก) จงหาสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์

(ข) จงแสดง H ในเทอมของระบบพิกัดและโมเมนตัม

วิธีทำ (ก) T (ในเทอมของระบบพิกัดเชิงขั้ว) $= \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

$$F = -\frac{k}{r^2}$$

$$\int_{U=0}^{U} dU = -\int_{r=\infty}^{r} F dr$$

$$U = \int_{r=\infty}^{r} \frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r}$$

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}$$

สำหรับ θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

สมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์สำหรับระบบพิกัด θ คือ

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = \frac{d\ell}{dt} = 0$$

ดังนั้น $mr^2\dot{\theta} =$ ค่าคงตัว $=$ โมเมนตัมเชิงมุม ℓ

หรือ $\quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$

สำหรับ r

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

สมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์สำหรับระบบพิกัด r คือ

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0$$

(ข) ระบบพิกัดคือ r, θ

โมเมนตัมคือ p_r, p_θ

จากสมการ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ จะได้ $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

จากสมการ

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L \\
&= \left(p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta}\right) - \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{r} \\
&= \left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{r} \\
&= \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{k}{r}
\end{aligned}
$$

บทที่ 7
จบแล้วค่ะ

นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทมาส่งด้วยนะคะ