เซตและความสัมพันธ์

เนื้อหา

- เซต
- คุณสมบัติพื้นฐานของเซต
- ชนิดของเซต
- ความสัมพันธ์ระหว่างเซต
- การดำเนินการบนเซต
- การประยุกต์ใช้เซตเพื่อแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์
- ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)
- ความสัมพันธ์ (Relation)
- โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
- ฟังก์ชันพีชคณิตของฟังก์ชัน

เซต (Set)

บทนิยาม

เซต (Set) คือ กลุ่มของสิ่งที่สนใจ โดยไม่สนใจอันดับของสิ่งที่อยู่ภายในเซต ที่เรียกว่า สมาชิก (Element)

เซต (Set)

- เซต (*set*) ใช้แทนกลุ่มของวัตถุหรือสิ่งของที่แตกต่างกัน โดยสมาชิกของเซตอาจมีศูนย์หรือมากกว่าศูนย์ชิ้นก็ได้ และลำดับการเขียนสมาชิกของเซตนั้นไม่มีความสำคัญ นิยมใช้อักษรอังกฤษพิมพ์ใหญ่แทนเซตใดๆ เช่น A, B เป็นต้น
- ทฤษฎีเซต จะกล่าวถึง การดำเนินการกับเซต, ความสัมพันธ์ระหว่างเซต และประโยคในการอ้างถึงเซต
- $a \in A$ "a เป็นสมาชิกของ A"
  $a \notin A$ "a ไม่เป็นสมาชิกของ A"
- กำหนดให้ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ "A มีสมาชิก $a_1, \ldots, a_n$"
- ลำดับของสมาชิกไม่มีความแตกต่าง
- สมาชิกที่เหมือนกัน ถือว่าเป็นสมาชิกตัวเดียวกัน

ตัวอย่างของเซต

- เซตของวันในหนึ่งสัปดาห์ หมายถึง กลุ่มของวันจันทร์ วันอังคาร วันพุธ วันพฤหัสบดี วันศุกร์ วันเสาร์ และวันอาทิตย์
- เซตของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หมายถึง กลุ่มของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งประกอบด้วย สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้า
- เซตของพยัญชนะไทย
- เซตของนักเรียนหญิงที่เรียนในสาขาวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศ
- เซตของจำนวนนับทั้งหมด

คุณสมบัติพื้นฐานของเซต

- **การเขียนแจกแจงสมาชิกด้วยลำดับที่แตกต่างกันไม่มีผลทำให้เซตนั้นแตกต่างกัน:**
  - เช่น เซตของวัตถุ a, b, และ c
    {a, b, c} = {a, c, b} = {b, a, c} ={b, c, a} = {c, a, b} = {c, b, a}
- **การเขียนแจกแจงสมาชิกซ้ำ(หรือเหมือนกัน)ไม่ทำให้เซตนั้นแตกต่างกัน**
  - ถ้า a=b, ดังนั้น {a, b, c} = {a, c} = {b, c} = {a, a, b, a, b, c, c, c, c}
  - จะเห็นว่าเซตนี้มีสมาชิกจำนวน 2 ตัวเท่านั้น!

ชนิดของเซต

- เซตจำกัด
- เซตอนันต์
- เซตว่าง

เซตจำกัด (finite sets)

- **เป็นเซตที่มีสมาชิกจำนวนจำกัด สามารถนับได้**
- ตัวอย่างเช่น

A = {1, 2, 3, 4}

B = {x | x เป็นจำนวนเต็ม และ $1 \leq x \leq 4$}

เซตอนันต์ (Infinite Sets)

- เซตอาจมีจำนวนสมาชิกไม่จำกัดเรียกว่า **เซตอนันต์** (*infinite*)
- สัญลักษณ์ของเซตอนันต์ เช่น:

N = {1, 2, 3, ...} เซตของจำนวนนับ

Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...} เซตของจำนวนเต็ม

R = เซตของจำนวนจริง เช่น {-0.15, 3.67, 30, 74.18284719818125...}

- นิยมเขียนเป็นอักษรพิมพ์ใหญ่และเข้ม
- เซตอนันต์แต่ละเซตอาจมีจำนวนสมาชิกที่แตกต่างกัน!

เซตว่าง (Empty Set)

- $\varnothing$ (“null”, “เซตว่าง”) หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิก
- $\varnothing = \{\}$

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

- การเท่ากันของเซต
- สับเซต
- เอกภพสัมพันธ์ (Relative Universe)

การเท่ากันของเซต

- เซต A และ B เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีสมาชิกที่เหมือนกันทุกตัว เช่น:
  - A = {9, 2, 7, -3}, B = {7, 9, -3, 2} :
  - A = {หมา, แมว, ม้า},
    B = {แมว, ม้า, กระรอก, หมา} :
  - A = {หมา, แมว, ม้า},
    B = {แมว, ม้า, หมา, หมา} :
  - A = {1, 2, 3, 4},
    B = {x | x เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $x>0$ และ $x<5$ }:

สับเซต

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซต

A เป็นสับเซตของ B หมายถึง สมาชิกทุกตัวของ A อยู่ใน B

เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{ 1, 2, 3 \}$ และ $B = \{ 1, 2 \}$

A เป็นสับเซตของ B หรือไม่ เพราะเหตุใด

สับเซต

ข้อสังเกต

เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต

เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวมันเอง

ตัวอย่าง ถ้า A = { 1, 2, 3 } จงหาสับเซตของ A

วิธีทำ สับเซตทั้งหมดของ A ประกอบด้วย $\emptyset$, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3} และ { 1, 2, 3 }

ถ้า A มีจำนวนสมาชิก m ตัว

จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A จะมีทั้งหมด 2^m ตัว

เพาเวอร์เซต

บทนิยาม เซตกำลังของ A หมายถึง เซตที่มีสมาชิกเป็นสับเซตทั้งหมดของ A

ตัวอย่าง กำหนดให้ A = {1, 3, 5} จงหาเซตกำลังของ A

P(A) = Ø, {1}, {3}, {5}, {1, 3}, {3, 5}, {1, 5} และ {1, 3, 5}

เอกภพสัมพันธ์ (Universal set)

- เอกภพสัมพันธ์ (Universal set) คือ เซตที่ครอบคลุมสมาชิกทั้งหมดที่สนใจ หรือ ทุก ๆ เซตที่พิจารณาอยู่นั้นอยู่ภายใต้เซตนี้ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ U ตัวอย่างเช่น
- A ={x| -3 ≤ x ≤3} จะพบว่าไม่สามารถระบุสมาชิกของเซต B ได้ ถ้ากำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก แสดงว่า A={1, 2, 3}
- B ={x| x เป็นจำนวนนับที่มีค่าน้อยว่า 5} แสดงว่า U คือเซตของจำนวนนับ จะได้สมาชิกของ B ={1, 2, 3, 4}

การดำเนินการบนเซต

- ยูเนียน
- อินเตอร์เซกชัน
- ผลต่าง
- คอมพลีเมนต์

ยูเนียน (Union Operator)

- กำหนดเซต A, B, ผลรวม(*Union*) $A \cup B$ คือ เซตของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน A, **หรือ** อยู่ใน B (หรืออยู่ในทั้งสองเซต)
- เขียนได้ว่า, $\forall A,B: A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- สังเกตว่า $A \cup B$ *เป็น* ซุปเปอร์เซต ของทั้งเซต A และเซต B

อินเตอร์เซกชัน (Intersection Operator)

- กำหนดเซต *A*, *B*, ส่วนตัด(*intersection*) $A \cap B$ คือ เซตของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในเซต *A* ***และ*** (“$\wedge$”) ในเซต *B*
- เขียนได้ว่า, $\forall A,B: A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- สังเกตว่า $A \cap B$ *เป็น**เซตย่อย*** ของทั้งเซต A และ B:

ผลต่างของเซต (Difference)

- ผลต่างของเซต B เมื่อเทียบกับเซต A ก็คือผลต่างของ A และ B ซึ่งก็คือเซตของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

โดยที่

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

คอมพลีเมนต์ (Complement)

ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพันธ์

คอมพลีเมนต์ของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของ U ซึ่งไม่ใช่สมาชิกที่อยู่ในเซต A

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

Set Operations

ตัวอย่าง:

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,

$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$

- $A \cup B =$.....
- $A \cap B =$.....
- $\bar{A} =$.....
- $\bar{B} =$.....
- $A - B =$.....
- $B - A =$.....

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

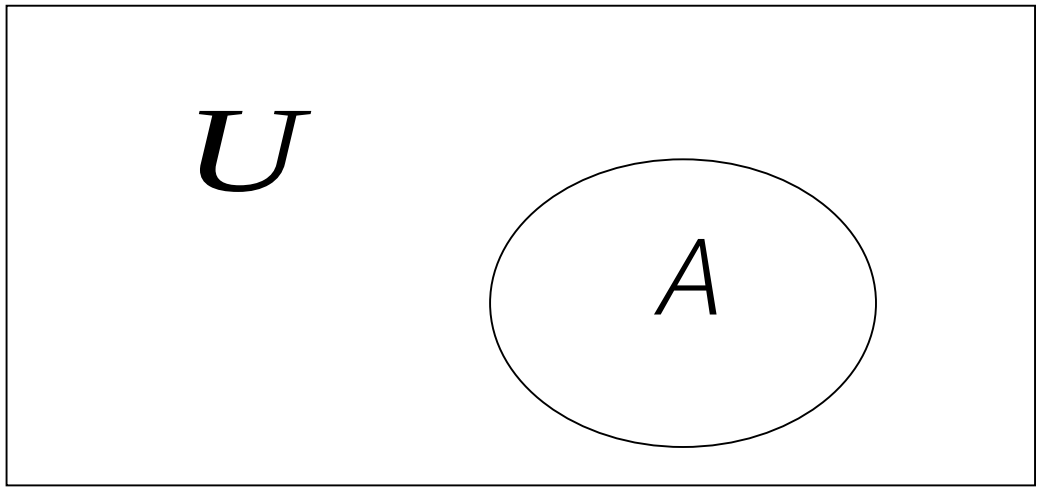
- เป็นแผนภาพที่ใช้อธิบายในเรื่องการดำเนินการบนเซต
- โดยจะใช้ ภาพวงกลม แทน เซต และใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U
- บริเวณที่แรเงาแสดงผลการดำเนินการบนเซตที่ต้องการ

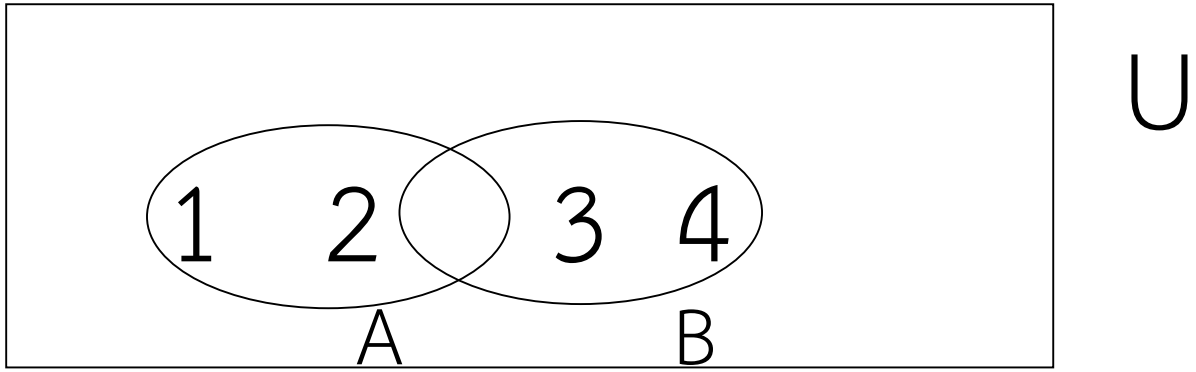
U (Universe) หมายถึง เซตของจำนวนสมาชิกทั้งหมดในขอบเขตที่ต้องการศึกษา

$a \in A$ หมายถึง a เป็นสมาชิกของเซต A

(a is an element of set A)

เราอาจใช้แผนภาพแสดงความหมายของ A และ U



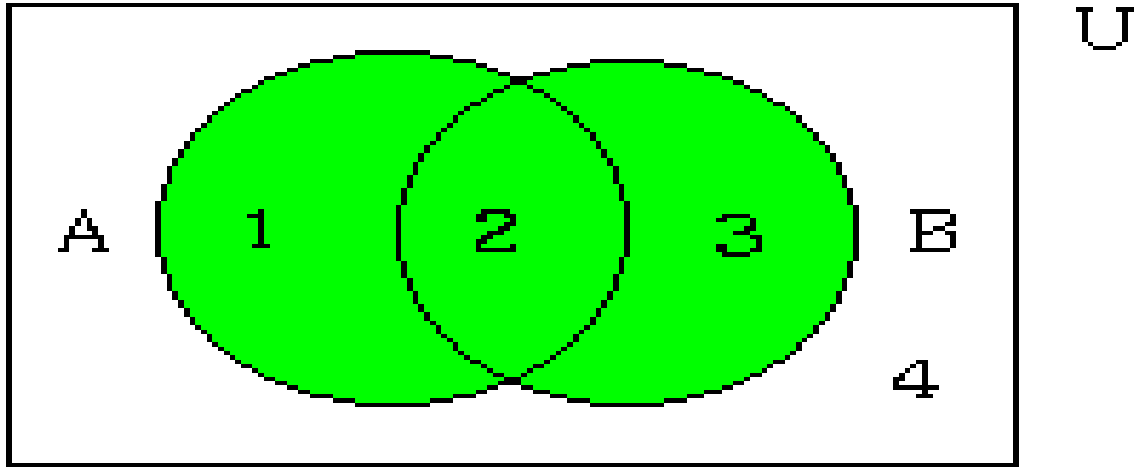


$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3\}$

$U = \{1, 2, 3, 4\}$

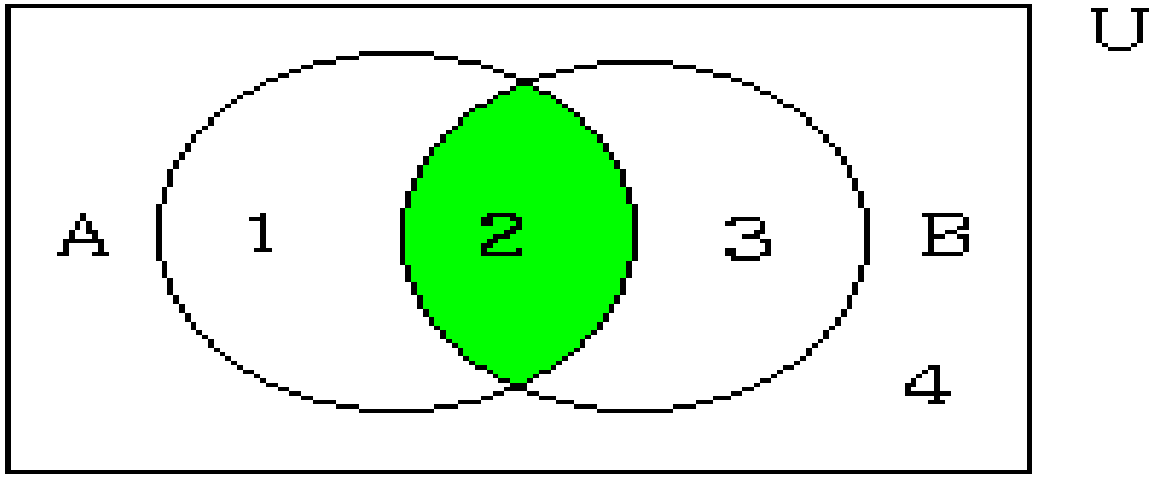
ยูเนียน (Union Operator)



$A \cup B = \{1, 2, 3\}$

ข้อสังเกต $A \cup B = B \cup A$

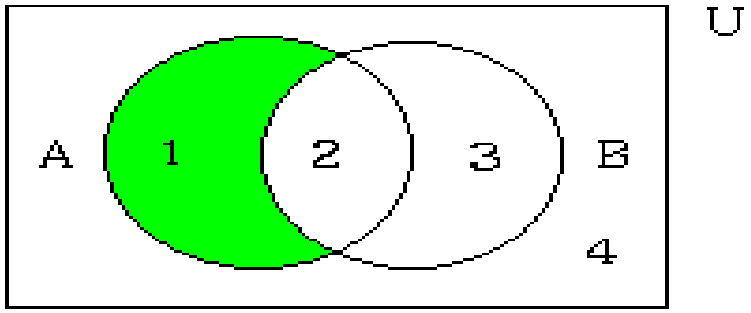
อินเตอร์เซกชัน (Intersection Operator)

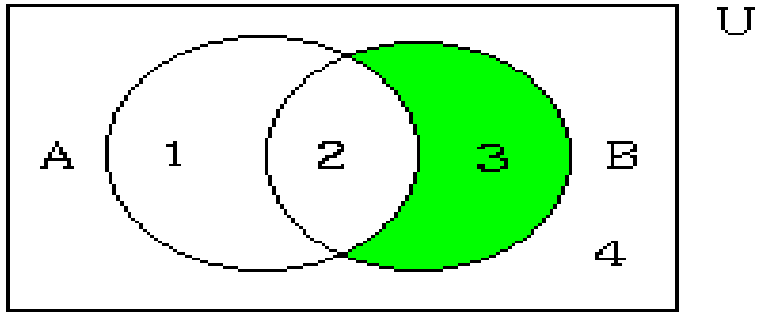


$$A \cap B = \{2\}$$

ข้อสังเกต $A \cap B = B \cap A$

ผลต่าง (Difference)



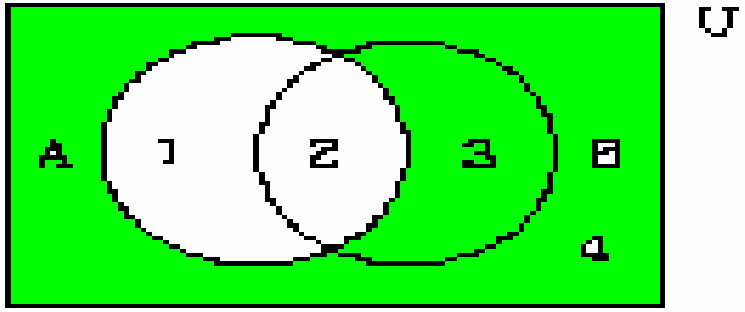


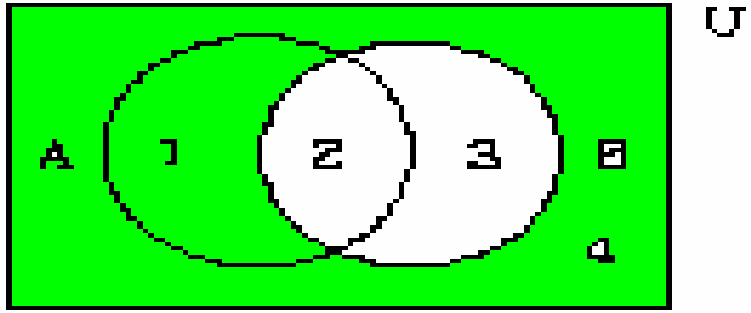
A - B = {1}

B - A = {3}

ข้อสังเกต A - B ≠ B - A

คอมพลีเมนต์ (Complement)





$A' = \{3, 4\}$

$B' = \{1, 4\}$

ข้อสังเกต $A \cup A' = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} = U$

การประยุกต์ใช้เซตเพื่อแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์

เอกสารอ้างอิง

โอภาส เอี่ยมสิริวงศ์. (2558). **คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์.** กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น. หน้า 205-219