ความสัมพันธ์ (Relations)

หัวข้อเนื้อหาบทเรียน

- ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)
- ความสัมพันธ์ (Relation)
- โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
- ฟังก์ชัน
- การประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์เพื่อแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์

ผลคูณคาร์ทีเชียน (Cartesian Product)

- **นิยาม** ผลคูณคาร์ทีเชียน ของเซต A และ B คือ เซตคู่ลำดับ (a,b) ทั้งหมดโดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ เช่น

  $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$ และ $A \times B$ คือ ผลคูณคาร์ทีเชียนของเซต A และ เซต B

  ดังนั้น

  $$A \times B = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด A = { 1, 6 } , B = { 2, 4, 7 }

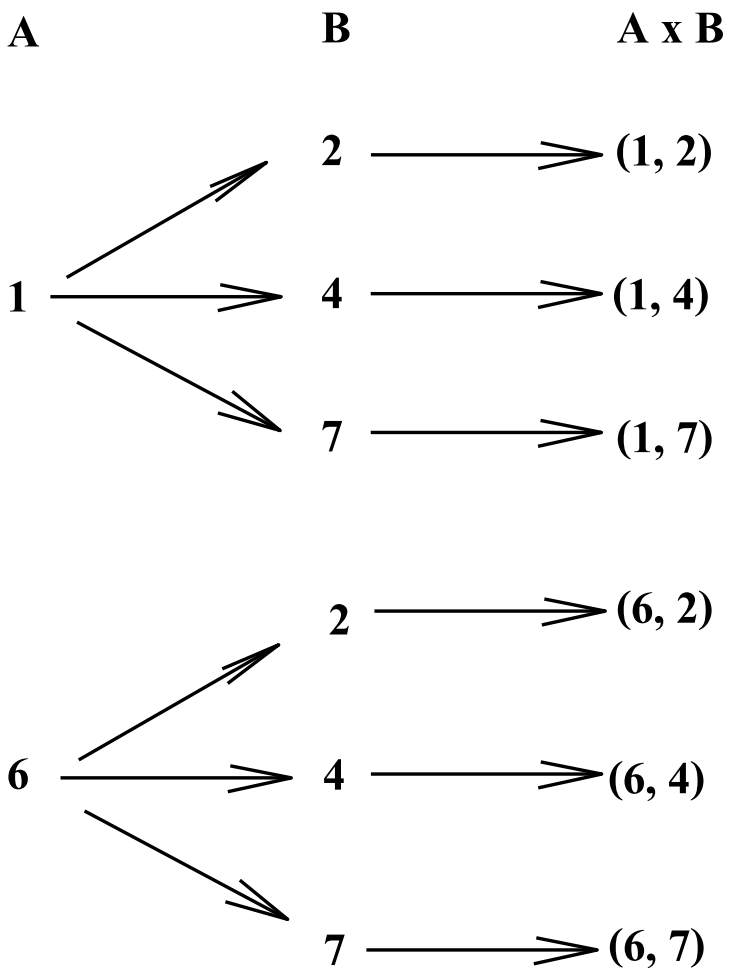
จะได้ว่า A x B = {(1, 2), (1, 4), (1, 7), (6, 2), (6, 4), (6, 7)}

และ B x A = {(2, 1), (2, 6), (4, 1), (4, 6), (7, 1), (7, 6)}

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1 พบว่า

1. $A \times B \neq B \times A$
2. จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ เท่ากับจำนวนสมาชิกของ $B \times A$
3. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว และ B มีสมาชิก n ตัว จะได้ว่า $A \times B$ มีสมาชิก mxn ตัว

นอกจากนี้อาจใช้แผนภาพในการหาผลคูณคาร์ทีเซียนได้ดังนี้



A = { 1, 6 } ,

B = { 2, 4, 7 }

ความสัมพันธ์ (Relation)

บทนิยาม : r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ AxB

ความสัมพันธ์ (Relation) **หมายถึง เซตของคู่ลำดับ**

- ความสัมพันธ์จะมีขึ้นต้องมีเซตของคู่ลำดับ (Order Pairs) ก่อน
- คู่ลำดับจะเกิดขึ้นได้เมื่อมี A x B หรือ B x A ซึ่งเป็นผลคูณคาร์ทีเซียนนั่นเอง
- R ก็คือเซตย่อยของ A x B

ความสัมพันธ์ (Relation)

- ถ้าให้ a และ b เป็นสมาชิกใด ๆ
- อันดับของการเขียนสมาชิก a และ b ซึ่งเขียนได้ในรูป (a, b) เรียกว่า **คู่อันดับ**
- เรียก a ว่า **สมาชิกตัวหน้า** และเรียก b ว่า **สมาชิกตัวหลัง**

ตัวอย่าง กำหนดให้ A={1,2,3,4} , B={0,2,4,6}

ให้ r แทนความสัมพันธ์ “มากกว่า” จาก A ไป B

หรือ $r = \{ (x,y) \in A \times B \mid a > b \}$

- จะได้ $r = \{ (1,0), (2,0), (3,0), (3,2), (4,0), (4,2) \}$

ตัวอย่าง

กำหนด A = {x|x เป็นจำนวนเต็ม}

B = {x|x เป็นจำนวนเต็มบวก}

ถ้า $r_1 = \{ (x,y) \in A \times B \mid y = x^2 \}$

เขียน r_1 แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$\boxed{r_1 = \{ (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9), \ldots \}}$$

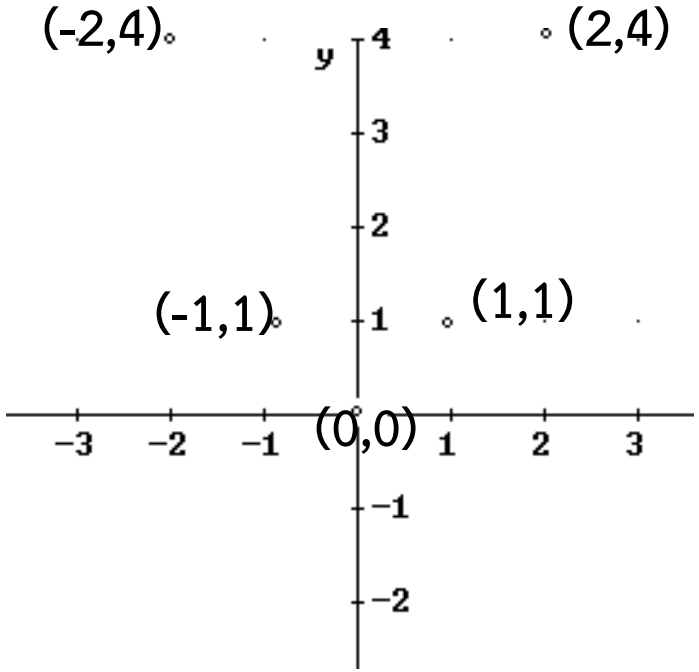
การวาดกราฟของความสัมพันธ์

บทนิยาม : ให้ R เป็นเซตจำนวนจริง r เป็นสับเซตของ R x R

กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพนธ์ r

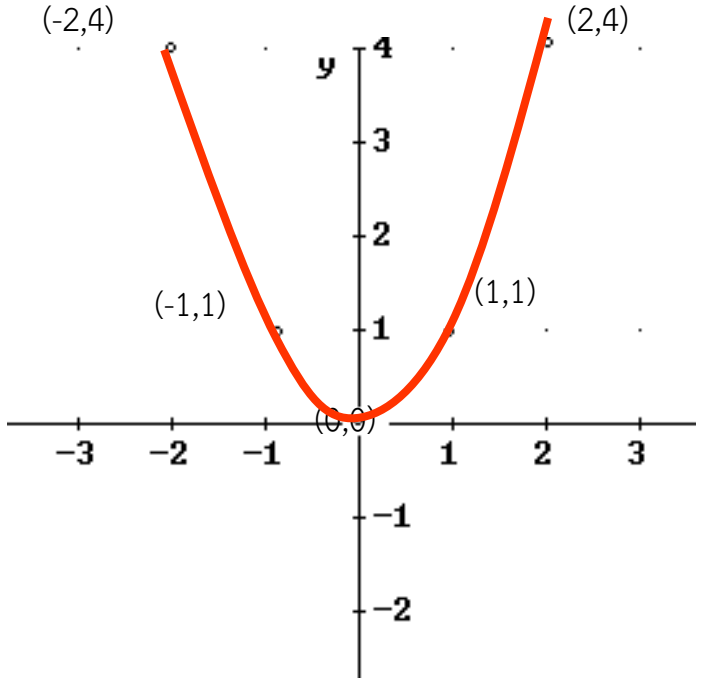
ตัวอย่าง

จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ r = $\{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2\}$



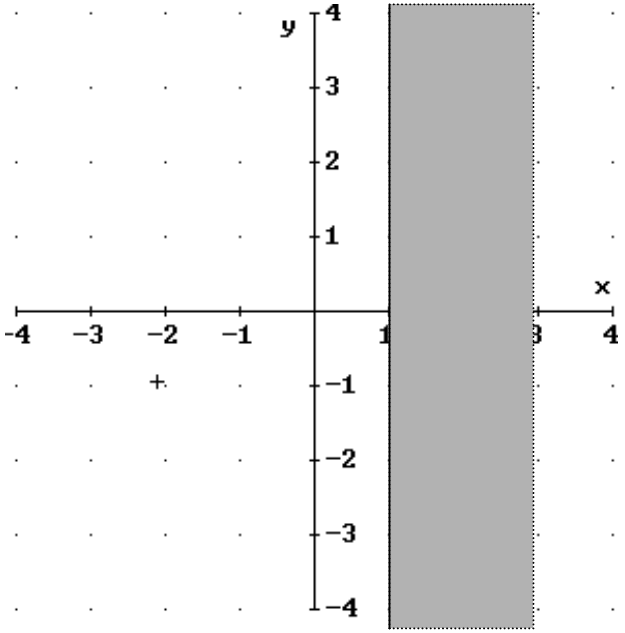
(กราฟมีลักษณะเป็นจุด)

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ r $=\{(x,y)\in R\times R \mid y=x^2\}$



(กราฟมีลักษณะเป็นเส้น เนื่องจากโดเมนคือ R)

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ r = $\{(x, y) \in R \times R \mid 1 \le x < 3\}$

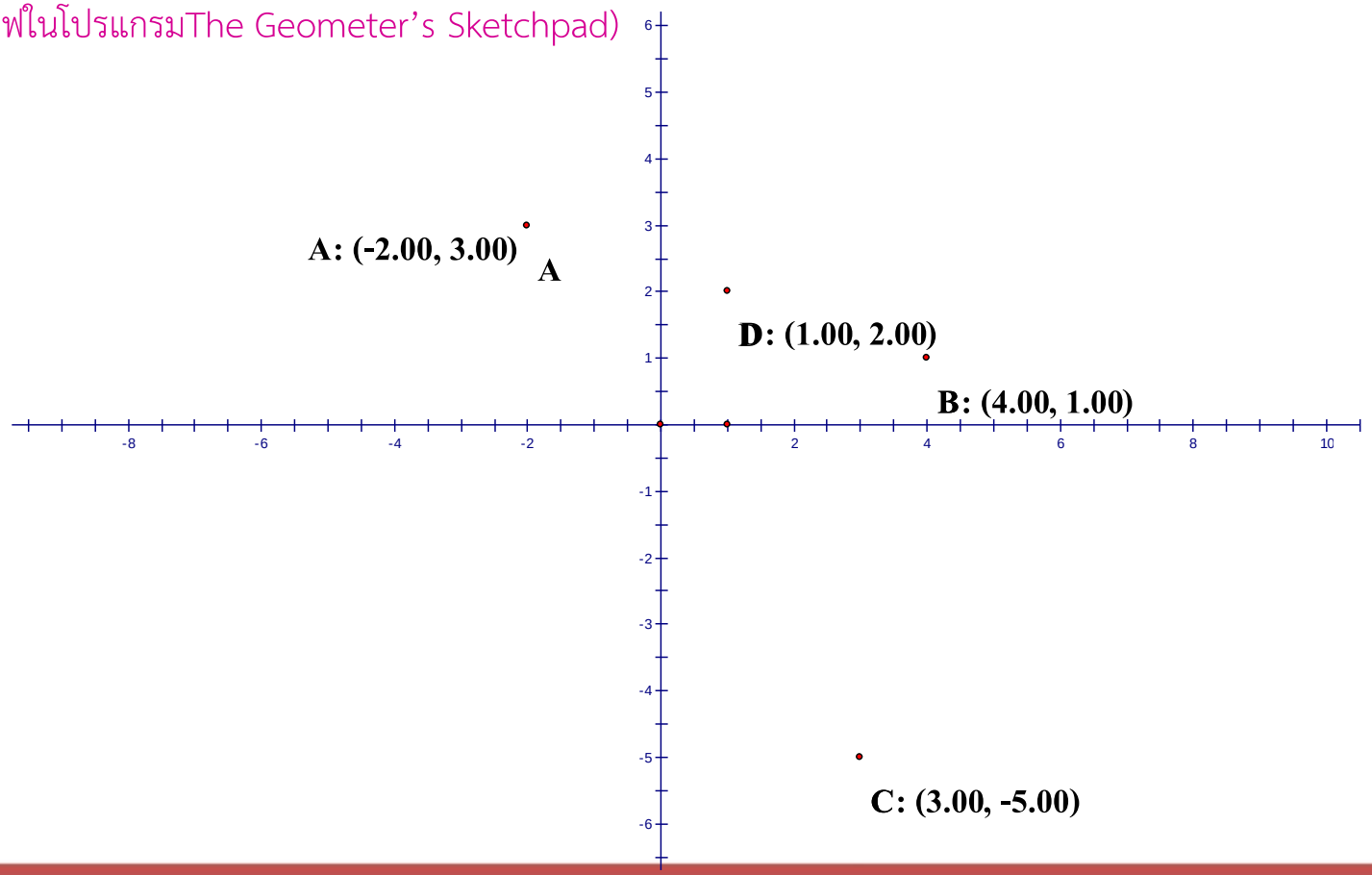


(กราฟมีลักษณะเป็นพื้นที่)

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ r = {(1, 2),(4, 1),(3, -5), (-2, 3)}

วิธีทำ กราฟของความสัมพันธ์ดังกล่าว จะมีทั้งหมด 4 จุด ดังนี้

(เขียนกราฟในโปรแกรมThe Geometer's Sketchpad)



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $(x, y) \in R \times R$

แสดงว่า x และ y ต่างก็เป็นจำนวนจริง

ดังนั้นจะมีคู่อันดับใน r มากมายที่สอดคล้องกับสมการ y = 2x + 1

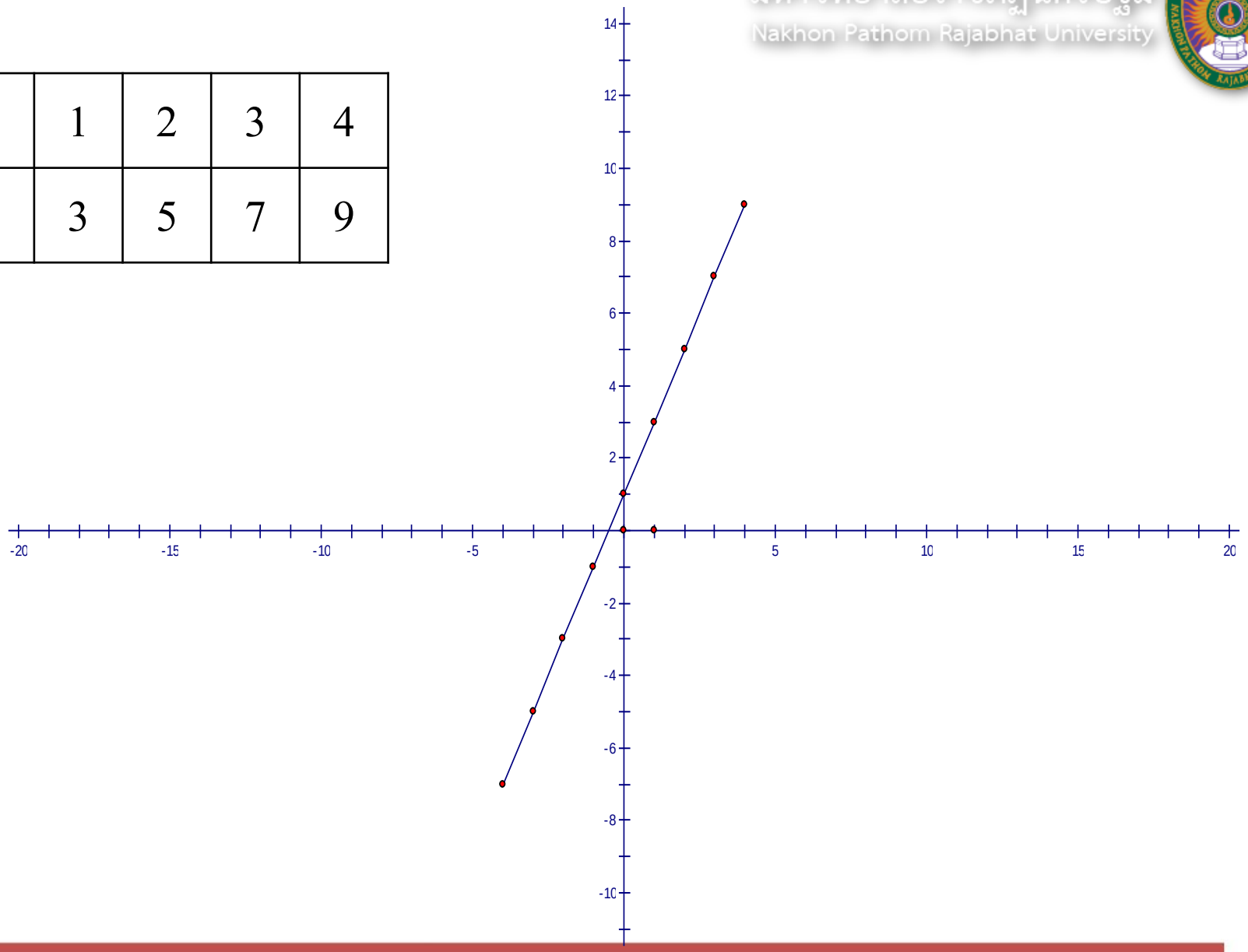
เพื่อมองแนวโน้มของจุด เราจะหาเพียงบางจุดในความสัมพันธ์ r ดังนี้

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9

(เขียนกราฟในโปรแกรมThe Geometer's Sketchpad)

จากนั้นนำคู่อันดับมาเขียนกราฟได้ดังนี้

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9



โดเมนและเรนจ์

- โดเมนและเรนจ์
- การหาโดเมนและเรนจ์โดยการแก้สมการ
- การหาโดเมนและเรนจ์โดยการวาดกราฟ

โดเมนและเรนจ์

ถ้ากำหนด R เป็นความสัมพันธ์

โดเมนของ R : (D_r) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับ

เรนจ์ ของ R : (R_r) คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่ลำดับ

<u>ตัวอย่าง</u> $R = \{(-1,1),(0,0)\}$

โดเมน คือ $\{-1,0\}$

เรนจ์ คือ $\{1,0\}$

การหาโดเมนและเรนจ์โดยการแก้สมการ

- จงหา โดเมนและเรนจ์ ของ r เมื่อกำหนด

r = { (x,y) | $y = \sqrt{x^2 - 9}$ }

หาโดเมน จาก $y = \sqrt{x^2 - 9}$

จะหาค่า y ได้ก็ต่อเมื่อ

$x^2 - 9 \geq 0$

$(x-3)(x+3) \geq 0$

ดังนั้น $x \leq -3$ หรือ $x \geq 3$

หาเรนจ์

จาก $x^2 - 9 \geq 0$

จะได้ $\sqrt{x^2 - 9} \geq 0$

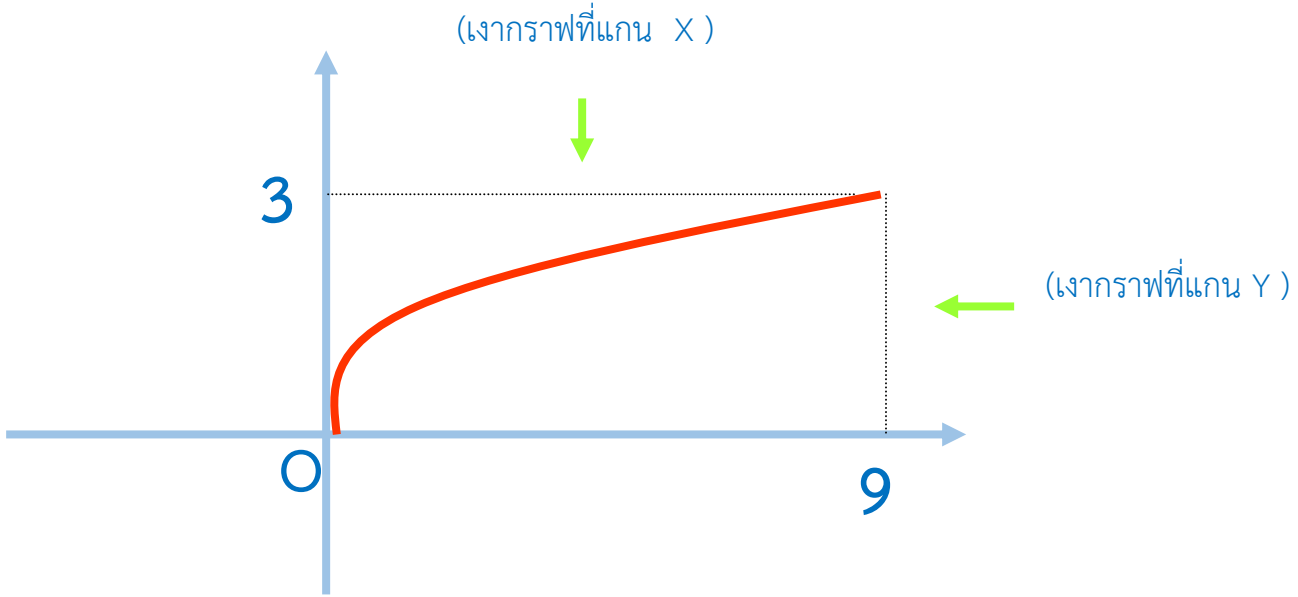
ดังนั้นเรนจ์ r $\{y \in R \mid y \geq 0\}$

ดังนั้นโดเมน r $= \{x \in R \mid x \leq -3 \vee x \geq 3\}$

การหาโดเมนและเรนจ์โดยการวาดกราฟ

- การหาโดเมน ให้ดูเส้นกราฟตามแนวแกน X ว่าเริ่มต้นและสิ้นสุดที่ใด ก็จะได้ค่าโดเมน
- การหาเรนจ์ ให้ดูเส้นกราฟตามแนวแกน Y ว่าเริ่มต้นและสิ้นสุดที่ใด ก็จะได้ค่าเรนจ์

ตัวอย่าง กำหนดกราฟ r ดังรูป จงหาโดเมน และเรนจ์ของ r



โดเมนของ r คือ [0,9]

เรนจ์ของ r คือ [0,3]

อินเวอร์สของความสัมพันธ์

บทนิยาม

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r ความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง ของคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

อินเวอร์สของความสัมพันธ์

- อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เช่น $r = \{ (1,2),(3,4) ,(5,-6) \}$

จะได้ $r^{-1} = \{ (2,1) ,(4,3) ,(-6,5) \}$

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \mid y = 2x + 1\}$

วิธีทำ

จะได้ $r^{-1} = \{(y,x) \mid y = 2x + 1\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x,y) \mid x = 2y + 1\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x,y) \mid y = \frac{x-1}{2}\}$

(นิยมเขียนในรูป $y = f(x)$)

ฟังก์ชันเบื้องต้น

- ฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B
- ฟังก์ชันทั่วถึง
- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชัน (Function)

บทนิยาม : ฟังก์ชัน คือความสัมพันธ์ซึ่งสำหรับคู่อันดับสองคู่ใดใด ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากัน

ฟังก์ชัน (Function) คือ ความสัมพันธ์อย่างหนึ่งโดยที่คู่ลำดับใด ๆ จะมีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันไม่ได้

เช่น

$R_1 = \{(1,2),(1,4)\}$ R_1 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

$R_2 = \{(1,3),(2,3)\}$ R_2 เป็นฟังก์ชัน ตามนิยาม

$R_3 = \{(1,4),(2,3)\}$ R_3 เป็นฟังก์ชัน ตามนิยาม

การกำหนดฟังก์ชัน

1. กำหนดโดยเซตแบบแจกแจงสมาชิก
2. กำหนดโดยการบอกเงื่อนไขของสมาชิกในความสัมพันธ์ r เช่น

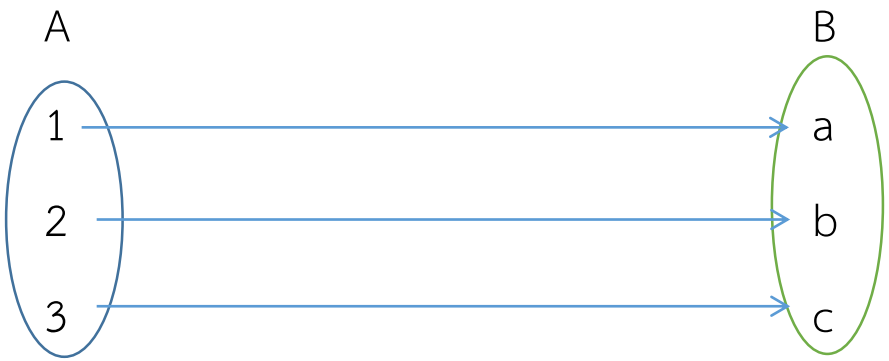
$$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$$

3. กำหนดโดยตารางคู่อันดับ

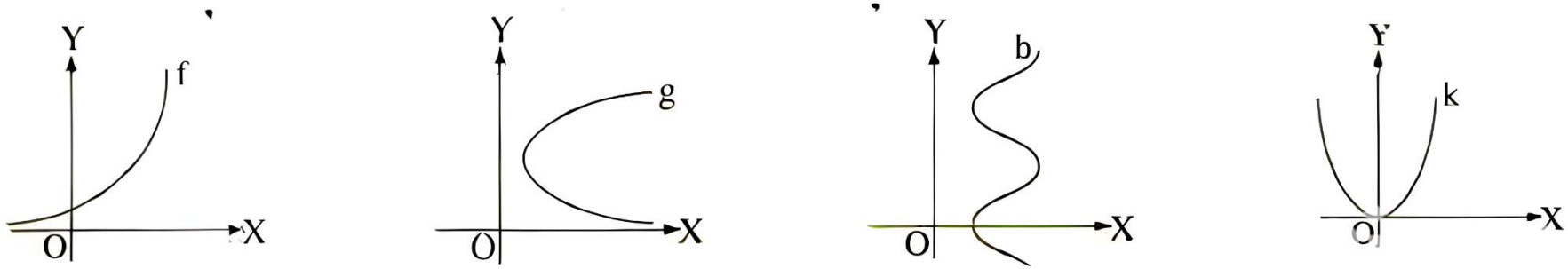
x	1	2	3
y	a	b	c

การกำหนดฟังก์ชัน (ต่อ)

4. กำหนดโดยแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกในเซต



5. กำหนดโดยกราฟ



หลักในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. ถ้าความสัมพันธ์อยู่ในรูปแจกแจงสมาชิก ให้ดูว่าตัวหน้าของคู่อันดับซ้ำกันหรือไม่ ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับซ้ำกัน แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

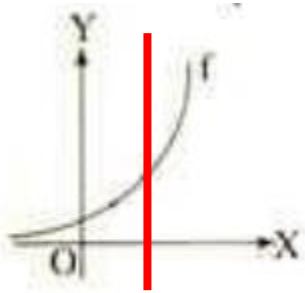
2. ถ้าความสัมพันธ์นั้นอยู่ในรูปของการกำหนดเงื่อนไขสมาชิก

   $r = \{(x,y) \in A \times B \mid P(x,y)\}$ ให้แทนค่าแต่ละสมาชิกของ x ลงในเงื่อนไข P(x,y) เพื่อหาค่า y ถ้ามี x ตัวใดที่ให้ค่า y มากกว่า 1 ค่า แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

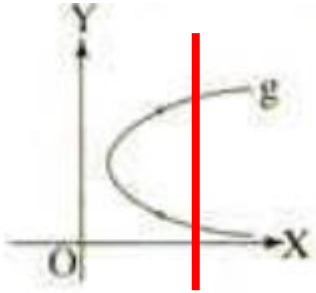
3. พิจารณาจากกราฟของความสัมพันธ์ โดยการลากเส้นตรงขนานกับแกน y ถ้าเส้นตรงดังกล่าวตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่า 1 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

หลักในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่ (ต่อ)

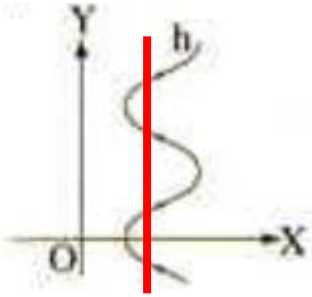
- ตัวอย่างการพิจารณาจากกราฟความสัมพันธ์



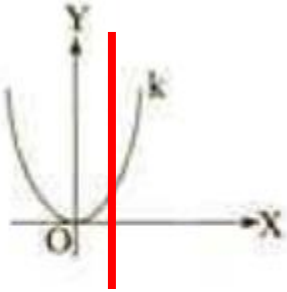
f เป็นฟังก์ชัน



g ไม่เป็นฟังก์ชัน



h ไม่เป็นฟังก์ชัน



k เป็นฟังก์ชัน

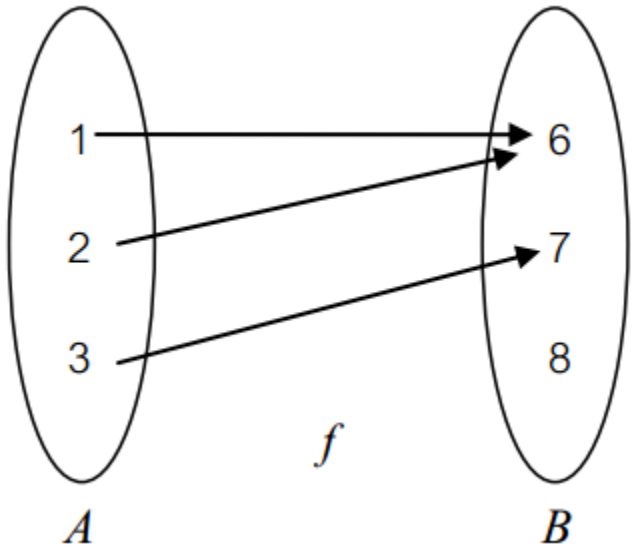
ฟังก์ชันจาก A ไป B

- ฟังก์ชันจาก A ไป B

f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนคือเซต A และเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $f : A \longrightarrow B$

ฟังก์ชันจากเซต *A* ไปเซต *B*

- ถ้ากำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B มีเงื่อนไข D_f = A



$f = \{(1,6),(2,6),(3,7)\}$

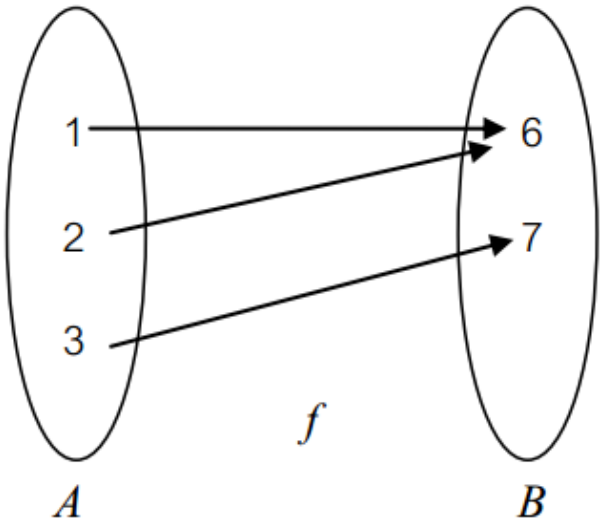
เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B

เพราะ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

ฟังก์ชันทั่วถึง (surjection function)

- **ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B**

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อทุก y ∈ B มี x ∈ A จับคู่อยู่ หรือกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ พิสัยเท่ากับ โคโดเมน

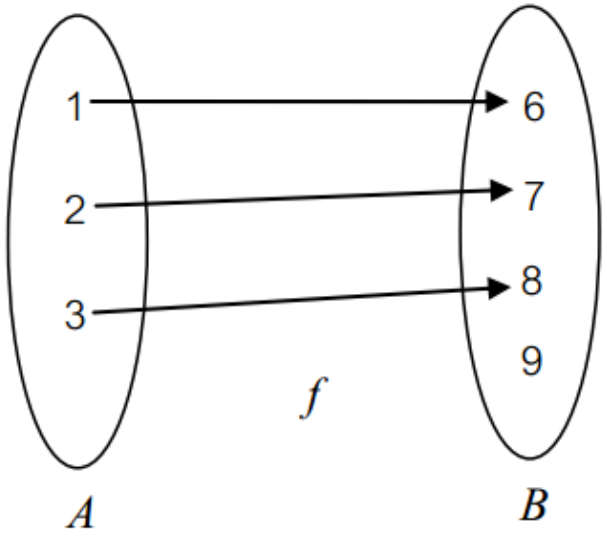


$f = \{(1,6),(2,6),(3,7)\}$
เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง B
เพราะ $D_f = A$ และ $R_f = B$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective function)

- **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B**

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งถ้า $y \in R_f$ แล้วมี $x \in D_f$ เพียงตัวเดียว เท่านั้นที่ทำให้ $(x,y) \in f$

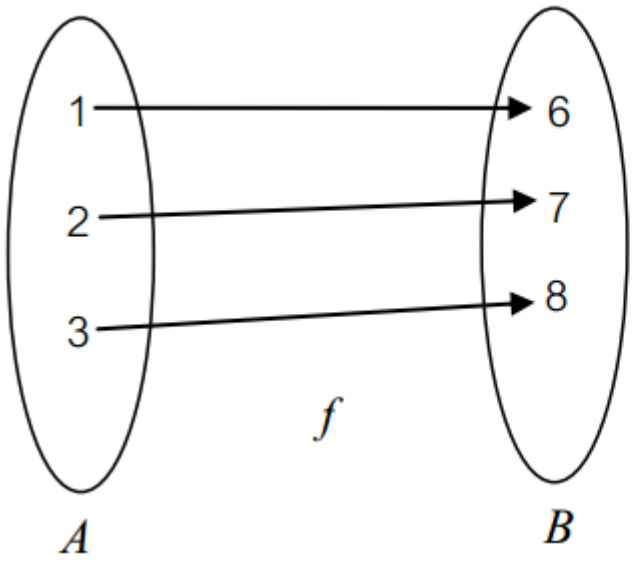


$f = \{(1,6),(2,7),(3,8)\}$
เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B แบบ $1-1$
เพราะ $n(D_f) = n(R_f)$

หรือกล่าวได้ว่า f เป็น 1-1 จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวในพิสัยมีพรีอิมเมจเพียงตัวเดียว

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijection function)

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติของการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง



$f = \{(1,6),(2,7),(3,8)\}$

เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B แบบ $1-1$

เพราะ $D_f = A$ และ $R_f = B$

$$n(D_f) = n(R_f)$$

$$n(A) = n(B)$$

- เมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง เราจะสามารถหาฟังก์ชันผกผัน (Inverse function) ของ f ได้ เขียนแทนด้วย f^{-1}

พีชคณิตของฟังก์ชัน

คือ การนำฟังก์ชันมา บวก ลบ คูณ และหารกัน

พีชคณิตของฟังก์ชัน

- คือ การนำฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไปมาบวก ลบ คูณ หาร กันเพื่อให้ได้ฟังก์ชันใหม่
- การหาผลลัพธ์ของพีชคณิตฟังก์ชัน ทำได้โดยการนำโคโดเมนของคู่อันดับของฟังก์ชันที่มีโดเมนเหมือนกันมาบวก ลบ คูณ หาร กัน
- **นิยาม** กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง
  - $f + g = \{(x,y) \mid y = f(x) + g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$
  - $f - g = \{(x,y) \mid y = f(x) - g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$
  - $f \cdot g = \{(x,y) \mid y = f(x) \cdot g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$
  - $f / g = \{(x,y) \mid y = f(x) / g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

ตัวอย่าง

- กำหนด f = {(1,2), (3,8), (5,6), (7,9)} และ g = {(1,6), (2,5), (3,4), (7,3)}

จงหา f + g , f – g, f .g และ f/g

วิธีทำ f+g = {(1,2+6), (3,8+4), (7,9+3)} = {(1,8),(3,12),(7,12)}

f-g = {(1,2-6), (3,8-4), (7,9-3)} = {(1,-4),(3,4),(7,6)}

f . g={(1,2 6),(3,8 4),(7,9 3)} = {(1,12),(3,32),(7,27)}

f /g = {(1,2/6),(3,8/4),(7,9/3)} = {(1,1/3),(3,2),(7,3)}

สรุป พีชคณิตของฟังก์ชัน คือ การนำตัวหลังของคู่อันดับที่มีตัวหน้าเหมือนกันมา บวก ลบ คูณ หารกัน แต่ต้องระวัง กรณีการหารต้องไม่ให้ตัวหารเป็นศูนย์

การประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์ เพื่อแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์

เอกสารอ้างอิง

โอภาส เอี่ยมสิริวงศ์. (2558). **คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์.** กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น. หน้า 205-219