ตรรกศาสตร์

หัวข้อเนื้อหาบทเรียน

- ประพจน์
- ตัวเชื่อมประพจน์และค่าความจริง
- นิเสธของประพจน์
- การหาค่าความจริงของประพจน์
- สัจนิรันดร์
- ประพจน์ที่สมมูลกัน

ตรรกศาสตร์ (Logic)

- เป็นศาสตร์ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับเหตุผลของข้อความหรือเหตุการณ์ที่สมเหตุสมผล

ประโยคที่ใช้ในการสื่อสารแบ่งเป็น 6 ชนิด

1. ประโยคบอกเล่า
2. ประโยคปฏิเสธ
3. ประโยคคำถาม
4. ประโยคคำสั่ง
5. ประโยคแสดงความต้องการ
6. ประโยคขอร้อง ชักชวน และอนุญาต

ประพจน์ (Proposition หรือ statement)

ประโยคบอกเล่าซึ่งแต่ละประพจน์มีค่าความจริงเป็น จริง(True) หรือ เท็จ(False) เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง ประพจน์ในตรรกศาสตร์จึง ไม่ใช้คำสั่ง คำอุทาน หรือคำถามตลอดจนข้อความอื่นซึ่งบอกไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จ

ประพจน์ในตรรกศาสตร์

มี 2 ลักษณะ คือ

1. **ประพจน์เดี่ยว (Simple proposition)** เช่น ตะกั่วเป็นโลหะ
2. **ประพจน์เชิงประกอบ (Compound proposition)** เช่น ตะกั่วเป็นโลหะ และ ทองเป็นโลหะ

ค่าความจริงของประพจน์ (Truth values)

1. ค่าความจริงเป็นจริง (true) จะใช้ T แทนค่าความจริงที่เป็นจริง
2. ค่าความจริงเป็นเท็จ (false) จะใช้ F แทนค่าความจริงที่เป็นเท็จ

ตัวอย่างประพจน์เชิงเดี่ยว

1. คนอีสานเป็นคนไทย (ค่าความจริงเป็น จริง (T))
2. ธงชาติไทยมี 3 สี (ค่าความจริงเป็น จริง (T))
3. จอร์ธบูธ เป็นนายกรัฐมนตรีของไทย (ค่าความจริงเป็น เท็จ (F))
4. 1+3=4 (ค่าความจริงเป็น จริง (T))

ตัวอย่างที่ไม่ใช่ประพจน์

1. คุณมาทำไม
2. ถอดรองเท้าออกซิ
3. เขาเป็นอาจารย์ใหญ่
4. X+14=15

แบบฝึกหัด

1. คุณจะไปไหน
2. จังหวัดจันทบุรีมีพลเมืองมากกว่ากรุงเทพมหานคร
3. $X <= 2$
4. สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x+2x=5$
5. บ่แน่ดอกนาย
6. ถ้า x เป็นจำนวนจริง $x+0=x$
7. เขาเป็นบุตรของพระอภัยมณี
8. สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว $x+y=y+x$
9. ประโยคนี้เป็นเท็จ

ประโยคเชิงประกอบ (Compound Sentences)

คือ การนำประโยคเชิงเดี่ยวหลายๆประโยคมาเชื่อมต่อกัน ดวย **ตัวเชื่อม(connective)** ได้แก่ คำว่า

1. “ไม่”(not)
2. ”และ”(and)
3. ”หรือ”(or)
4. ”ถ้า....แล้ว.....” (if....then ....)
5. “ก็ต่อเมื่อ” (if.....and only if.....)

ตัวอย่างจากประโยคเดี่ยว

2 น้อยกว่า 4 ----------1

2 เป็นเลขคู่ ---------- 2

เราสามารถสร้างประโยคเชิงประกอบ ใหม่ได้ดังนี้

2 ไม่น้อยกว่า 4

2 น้อยกว่า 4 และ 2 เป็นเลขคู่

2 น้อยกว่า 4 หรือ 2 เป็นเลขคู่

ถ้า 2 น้อยกว่า 4 แล้ว 2 เป็นเลขคู่

2 น้อยกว่า 4 ก็ต่อเมื่อ 2 เป็นเลขคู่

การเขียนสัญลักษณ์แทนประพจน์

ประพจน์เดี่ยว

P	แทน “2 น้อยกว่า 4”
Q	แทน “2 เป็นเลข คู่”

ประพจน์เชิงประกอบ

~ P	แทน “2 ไม่น้อยกว่า 4”
P ^ Q	แทน “2 น้อยกว่า 4 และ 2 เป็นเลขคู่”
P v Q	แทน “2 น้อยกว่า 4 หรือ 2 เป็นเลขคู่”
P $\rightarrow$ Q	แทน “ถ้า 2 น้อยกว่า 4 แล้ว 2 เป็นเลขคู่”
P $\leftrightarrow$ Q	แทน “2 น้อยกว่า 4 ก็ต่อเมื่อ 2 เป็นเลขคู่”

ตัวเชื่อมประพจน์และค่าความจริง

ประโยครวม (Conjunction)

คือ ประโยคที่ได้จากการเชื่อมประโยคสองประโยค ในลักษณะที่เป็นการยืนยันทั้งสองส่วน โดยใช้ตัวเชื่อม "และ" (and) เราใช้สัญลักษณ์ ^

ประโยครวมมีรูปแบบทั่วไปเป็น P ^ Q

ตัวอย่างประโยค

ฉันกินข้าวและกินขนม เขียนแทนด้วย p ^ q

ตารางค่าความจริงของประโยครวม P^Q

P	Q	P^Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตัวอย่าง 5+1= 6 และ 2 น้อยกว่า 3 (จริง)

5+1=6 และ 2 มากกว่า 3 (เท็จ)

5+1=1 และ 2 น้อยกว่า 3 (เท็จ)

5+1=1 และ 2 มากกว่า 3 (เท็จ)

ประโยคเลือก(Disjunction)

คือ ประโยคที่ได้จากการเชื่อมประโยค 2 ประโยคในลักษณะการรับรองอย่างน้อยหนึ่งส่วน ตัวเชื่อมของประโยคเลือกคือ “หรือ” (or) แทนด้วยสัญลักษณ์ v

ประโยคเลือกมีรูปแบบทั่วไป คือ P v Q

ตัวอย่างประโยค

ฉันกินข้าวหรือกินขนม **เขียนแทนด้วย p v q**

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

ตารางค่าความจริงของประโยคเลือก P v Q

P	Q	PvQ
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**F**

ตัวอย่าง

5+1=6 หรือ 2 น้อยกว่า 3 (จริง)

5+1=6 หรือ 2 มากกว่า 3 (จริง)

5+1=1 หรือ 2 น้อยกว่า 3 (จริง)

5+1=1 หรือ 2 มากกว่า 3 (เท็จ)

ประโยคเงื่อนไข (Condition)

คือประโยคที่แสดงเงื่อนไขหรือเหตุผล ตัวเชื่อมของประโยคเงื่อนไข คือตัวเชื่อม “ถ้า.....แล้ว ....”(if….then….) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\rightarrow$

มีรูปแบบทั่วไป $P \rightarrow Q$

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

ตารางค่าความจริงของประโยคเลือก P $\rightarrow$ Q

P	Q	P $\rightarrow$ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตัวอย่าง

ถ้า 1<2 แล้ว 2<3 (จริง)

ถ้า 1<2 แล้ว 3<2 (เท็จ)

ถ้า 2<1 แล้ว 2<3 (จริง)

ถ้า 2<1 แล้ว 3<2 (จริง)

ประโยคเงื่อนไขสองทาง (Bicondition)

คือประโยคที่แสดงเงื่อนไขหรือเหตุผล ตัวเชื่อมของประโยคเงื่อนไข คือตัวเชื่อม “..... ก็ต่อเมื่อ .....”(... if and only if....) ใช้สัญลักษณ์ทั่วไป P Q ซึ่งประโยคนี้จะมีความหมายเดียวกับ

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

ตารางค่าความจริงของประโยคเงื่อนไขสองทาง P $\leftrightarrow$ Q

P	Q	P$\leftrightarrow$Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ตัวอย่าง

1<2 ก็ต่อเมื่อ 2<3 (จริง)

1<2 ก็ต่อเมื่อ 3<2 (เท็จ)

2<1 ก็ต่อเมื่อ 2<3 (เท็จ)

2<1 ก็ต่อเมื่อ 3<2 (จริง)

ประโยคนิเสธ (Negations)

คือ ประโยคที่แสดงค่าความจริงตรงข้ามกับประโยคเดิม

สัญลักษณ์ทั่วไป คือ ~P แทนนิเสธของประโยค P

ตารางค่าความจริง ของประโยค ~P

P	~P
T	F
F	T

ตัวอย่าง

ประโยค ฉันหิว นิเสธคือ ฉันไม่หิว

ประโยค ฉันไม่หิว นิเสธคือ ฉันหิว

การหาค่าความจริงของประพจน์

- การวิเคราะห์ด้วยแผนภาพ (Diagramatic analysis)
- การวิเคราะห์ตารางค่าความจริง (Truth Table Analysis)

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

การหาค่าความจริงของประโยคเชิงประกอบที่ซับซ้อน

ในกรณีที่ประโยคเชิงประกอบนั้น สามารถทราบได้ว่า แต่ละประพจน์มีค่าความจริง เป็นจริง หรือ เป็นเท็จ เราสามารถ ใช้วิธีหาค่าความจริงของประโยคเชิงประกอบนั้นได้ โดย **การวิเคราะห์ด้วยแผนภาพ (Diagramatic analysis)** เช่น

ถ้า 7-5 =2 หรือ 2+8=1 แล้ว 7-5=2

P แทน 7-5=2 มีค่าความจริงเป็น จริง (T)

Q แทน 2+8=1 มีค่าความจริงเป็น เท็จ (F)

ตัวอย่าง

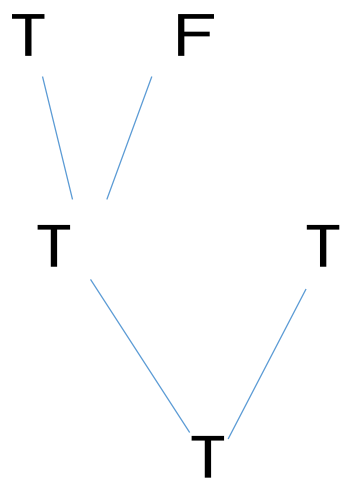
ถ้า 7-5 =2 หรือ 2+8=1 แล้ว 7-5=2

P แทน 7-5=2 มีค่าความจริงเป็น จริง (T)

Q แทน 2+8=1 มีค่าความจริงเป็น เท็จ (F)

เขียนในรูป**สัญลักษณ์ได้** $(P \vee Q) \rightarrow P$

- $(P \vee Q) \rightarrow P$



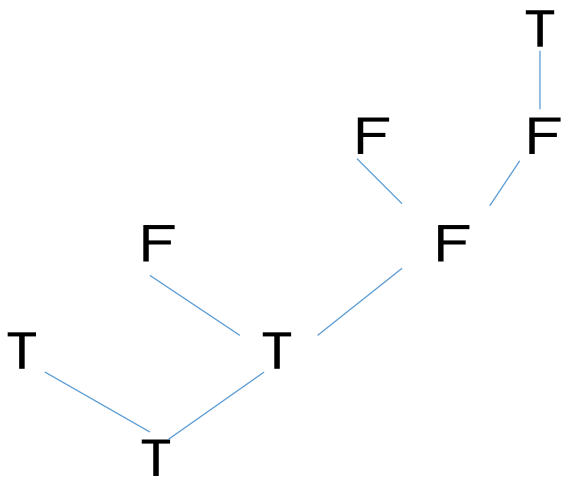
เพราะฉะนั้น ประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น **จริง**

ตัวอย่าง

จงหาค่าความจริงของประโยค P ^ (Q → (R v ~P)) เมื่อกำหนดว่า

P เป็น จริง, Q เป็น เท็จ, R เป็น เท็จ

P ^ (Q → (R v ~P))



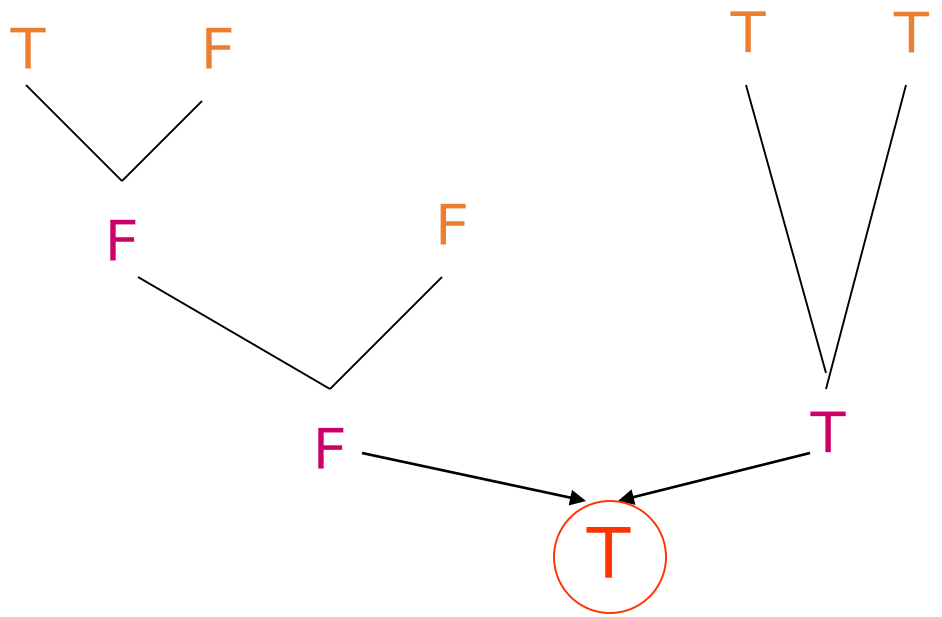
เพราะฉะนั้นประโยคนี้มีค่าความจริงเป็น จริง

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

ตัวอย่าง กำหนด p เป็นจริง q เป็นเท็จ r เป็นเท็จ และ s เป็นจริง

จงหาค่าความจริงของ $[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow (p \vee s)$

วิธีทำ $[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow (p \vee s)$



ดังนั้น ประพจน์ $[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow (p \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

ตัวอย่าง ถ้า $(r \rightarrow t) \wedge \sim (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว จงหาค่าความจริงของ r , s และ t

วิธีทำ

$$(r \rightarrow t) \wedge \sim (s \vee t)$$

F F F F F T T T

ดังนั้น r มีค่าความจริงเป็น เท็จ s มีค่าความจริงเป็น เท็จ

t มีค่าความจริงเป็น เท็จ

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

การวิเคราะห์ตารางค่าความจริง (Truth Table Analysis)

เป็นการวิเคราะห์ประโยคเชิงประกอบที่ประกอบไปด้วยประโยคย่อยที่ยังคงไม่ทราบค่าความจริงที่แน่นอน เราจะต้องพิจารณาค่าความจริงทุกกรณี

เช่น ถ้า $y-5 = 2$ หรือ $x+8 = 1$ แล้ว $y-5 = 2$

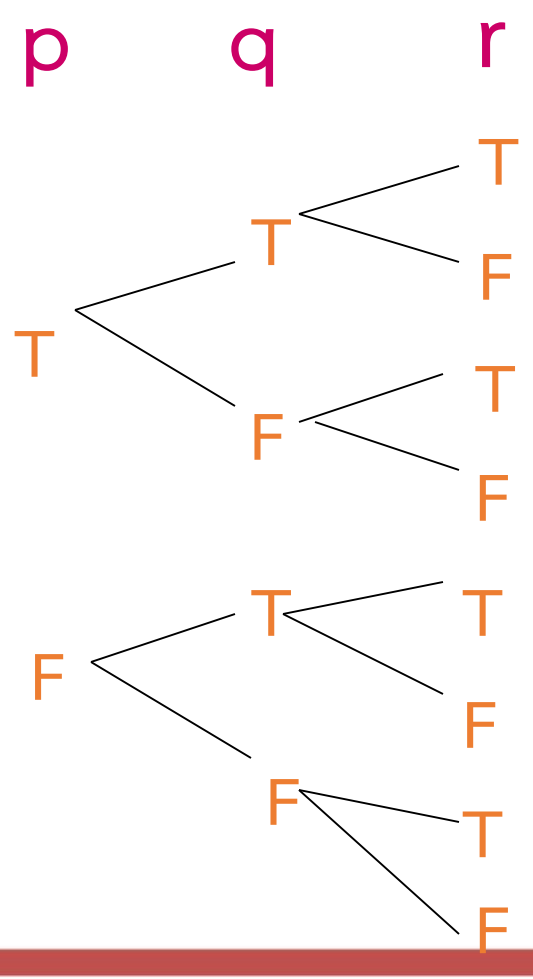
P แทน $y-5 = 2$

Q แทน $x+8 = 1$

การสร้างตารางค่าความจริง

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

พิจารณากรณีค่าความจริงของ ประพจน์ p , q และ r



p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

ถ้ามี n ประพจน์
จะมีจำนวนกรณี
ทั้งหมด 2^n กรณี

จงหาค่าความจริงของประโยค (PvQ) $\rightarrow$ Q

P	Q	PvQ	(PvQ)$\rightarrow$Q
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

จงหาค่าความจริง (P^Q) → R

P	Q	R	P^Q	P^Q→R
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

สัจนิรันดร์ (Tautology)

- หมายถึง รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
Nakhon Pathom Rajabhat University

ตัวอย่าง จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้ ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ $P \rightarrow (P \vee Q)$

P	Q	P v Q	P →(P v Q)
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

- จะพบว่า ค่าความเป็นจริงในทุกกรณี
- ประพจน์ $P \rightarrow (P \vee Q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ประพจน์ที่สมมูลกัน

- หมายถึง ประพจน์สองประพจน์ มีค่าความจริงเหมือนกันในทุกประการในลักษณะกรณีต่อกรณี

  วิธีการตรวจสอบการสมมูลกันของประพจน์ สามารถทำได้โดย

  1. สร้างตารางค่าความจริงของแต่ละประพจน์ขึ้นมาก
  2. พิสูจน์ค่าความจริงโดยเทียบกรณีต่อกรณี ว่าสมมูลกันหรือไม่

ตัวอย่าง จงตรวจสอบประพจน์ต่อไปนี้

P →Q สมมูลกับ ~ P v Q

P	Q	P →Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

~P	Q	~P v Q
F	T	T
F	F	F
T	T	T
T	F	T

- เมื่อเปรียบเทียบผลของค่าความจริงแบบกรณีต่อกรณีระหว่างสองประพจน์แล้ว จะพบว่ามีความจริงเหมือนกันทุกกรณี
- ดังนั้น ประพจน์ทั้งสองรูปแบบ สามารถนำไปใช้แทนกันได้

ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน

- ถ้าค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อม 2 ชุด มีค่าความจริงเป็นนิเสธกันทุกกรณีเรียกประพจน์ทั้ง 2 ชุดนี้ว่าเป็นนิเสธกัน

ตัวอย่าง จงตรวจสอบประพจน์ต่อไปนี้

P→Q สมมูลกับ P^~Q

P	Q	P→Q	~Q	P^~Q
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

ดังนั้น จะได้ว่า P→Q เป็นนิเสธกัน P^~Q

เอกสารอ้างอิง

โอภาส เอี่ยมสิริวงศ์. (2558). **คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์.** กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น. หน้า 205-219

Q&A

ทำแบบฝึกหัด