

# พีชคณิตบูลีน (Boolean algebra)



# หัวข้อเนื้อหา

- พื้นฐานของพืชคณิตบุลิน
- การดำเนินการ
- กฎพื้นฐานพืชคณิตบุลิน
- การใช้พืชคณิตบุลินลดรูปสมการลอจิก
- ทฤษฎีของเดอมอร์แกน



# พีชคณิตบูลีน

- เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ หลังจากถูกคิดค้นขึ้นโดย จอร์จ บูล (George Boole : 1815-1864)
- จึงถูกนำมาใช้ โดยนักวิทยาศาสตร์ชื่อแซนนอน (Claude Shannan) ในปี ค.ศ. 1938 แซนนอน ได้นำหลักการนี้มาแก้ปัญหาในงานโทรศัพท์ที่ต้องใช้รีเลย์จำนวนมาก หลังจากนั้นได้มีการนำเอาหลักการทางพีชคณิตบูลีนนี้ มาออกแบบวงจรคอมพิวเตอร์ซึ่งทำงานด้วยแรงดันเพียง 2 ระดับ

# พื้นฐานของพีชคณิตบูลีน

- ทฤษฎีของบูลีน (Boolean Theory) เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการคำนวณทางลอจิก
- ซึ่งใช้กับเลขฐาน 2 ที่มีตัวแปร 0 และ 1
- การใช้งานของ AND Gate, OR Gate และ NOT Gate หรือคอมพลีเมนต์
- ตัวแปรในพีชคณิตบูลีน มักจะใช้ตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B,... โดยค่าของตัวแปรแต่ละตัวอาจจะเป็น 0 หรือ 1 ก็ได้ ตัวแปรจะเป็นตัวถูกกระทำโดยตัวดำเนินการ

## หลักการเบื้องต้นของวงจรลอจิก

|                               |                                                     |                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Logic “0”</b><br>สถานะ “0” | ไม่มีสัญญาณ หรือ ไฟดับ<br>สวิตช์อยู่ในสถานะเปิดวงจร |  <b>SW</b> เปิดวงจร<br>   |
| <b>Logic “1”</b><br>สถานะ “1” | มีสัญญาณ หรือ ไฟติด<br>สวิตช์อยู่ในสถานะปิดวงจร     |  <b>SW</b> ปิดวงจร<br> |

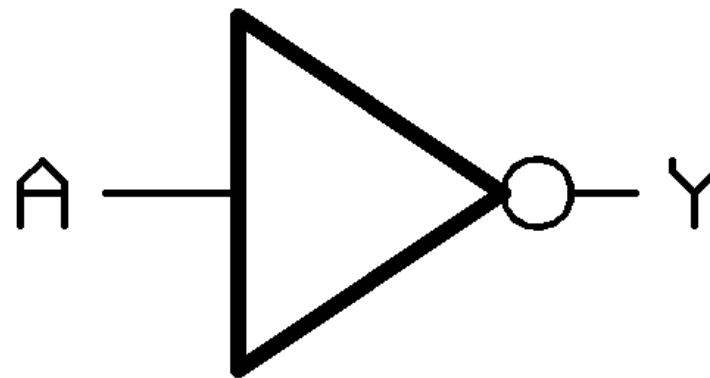
# พีชคณิตบูลีน

- การดำเนินการแบบ NOT

จะเห็นว่าตัวแปร A ถูกกระทำโดยตัวดำเนินการ NOT ในพีชคณิตบูลีน จะเขียนเครื่องหมายขีดบนตัวอักษร เรียกว่า บาร์ (bar) แทนตัวดำเนินการ NOT ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$X = \bar{A}$$

อ่านว่า “X เท่ากับนอต A” หรือ “X เท่ากับคอมพลีเมนต์ของ A”



| A | $\bar{A}$ |
|---|-----------|
| 0 | 1         |
| 1 | 0         |

## พีชคณิตบูลีน

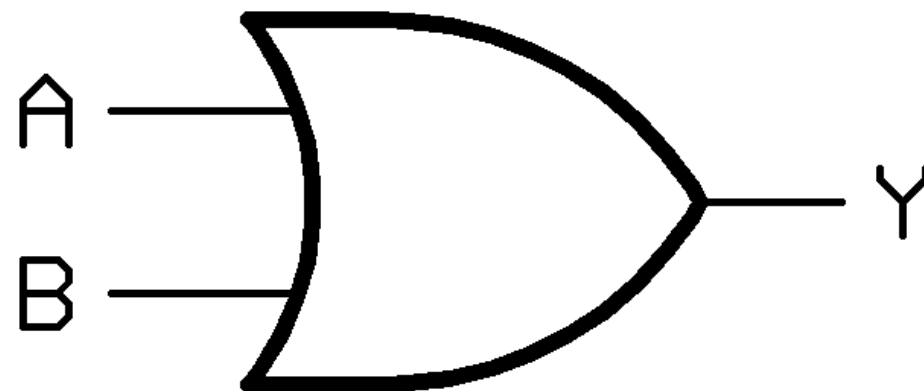
- การดำเนินการแบบ OR

$$X = A \text{ OR } B$$

- ในพีชคณิตบูลีนจะเรียกการ ออร์ (OR) ว่าเป็นการบวกแบบบูลีน จึงใช้เครื่องหมาย + (บวก) แทนตัวดำเนินการ OR ดังนี้

$$X = A + B$$

อ่านว่า “X เท่ากับ A ออร์ B” ผลลัพธ์ของเทอมบวกจะมีค่าเป็น 1 เมื่อตัวแปรตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไปมีค่าเป็น 1



| A | B | A+B |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0   |
| 0 | 1 | 1   |
| 1 | 0 | 1   |
| 1 | 1 | 1   |

# พีชคณิตบูลีน

- การดำเนินการแบบ AND

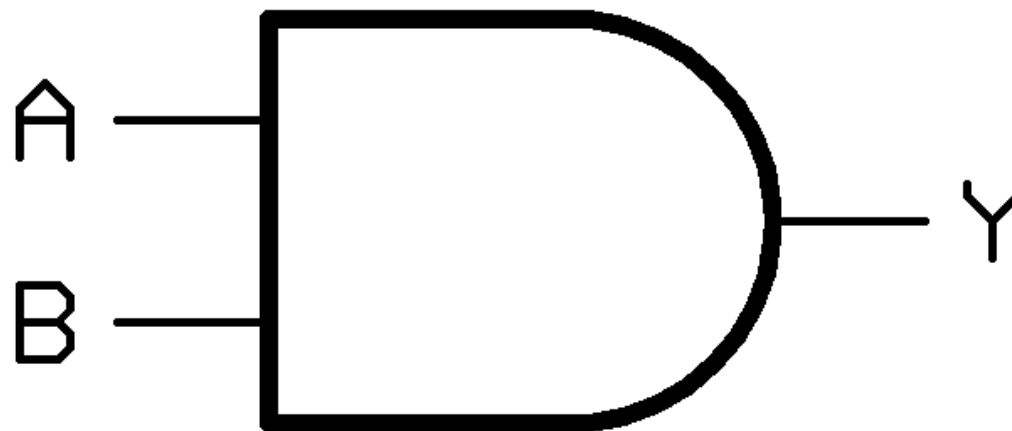
$$X = A \text{ AND } B$$

ในพีชคณิตบูลีน จะเรียกการแอนด์ (AND) ว่าการคูณแบบบูลีน โดยใช้เครื่องหมายจุดกลางบรรทัดวางระหว่างตัวแปร ดังนี้

$$X = A \cdot B$$

แต่การเขียนโดยทั่วไปจะไม่ใส่จุดเพราะเขียนง่าย สะดวกกว่าและถือเป็นรูปแบบมาตรฐานของนิพจน์การแอนด์ ดังนี้

$$X = AB$$



| A | B | A·B |
|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0   |
| 0 | 1 | 0   |
| 1 | 0 | 0   |
| 1 | 1 | 1   |

กฎพื้นฐานพืชชนิดบลูอิน



# กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

## กฎของ OR

$$1. \quad A + 0 = A$$

$$2. \quad A + 1 = 1$$

$$3. \quad A + A = A$$

$$4. \quad A + \bar{A} = 1$$

## กฎของ AND

$$5. \quad A \cdot 0 = 0$$

$$6. \quad A \cdot 1 = A$$

$$7. \quad A \cdot A = A$$

$$8. \quad A \cdot \bar{A} = 0$$

# กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

## กฎของการคอมพลีเมนต์

9.  $\overline{0} = 1$

10.  $\overline{1} = 0$

11. ถ้า  $A = 0$  แล้ว  $\overline{A}$  จะเท่ากับ 1

12. ถ้า  $A = 1$  แล้ว  $\overline{A}$  จะเท่ากับ 0

13.  $\overline{\overline{A}} = A$

---

## กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

- |     |                      |                     |
|-----|----------------------|---------------------|
| 14. | กฎการสลับที่ของ AND  | $AB = BA$           |
| 15. | กฎการสลับที่ของ OR   | $A+B = B+A$         |
| 16. | กฎการจัดกลุ่มของ AND | $A(BC) = (AB)C$     |
| 17. | กฎการจัดกลุ่มของ OR  | $A+(B+C) = (A+B)+C$ |
| 18. | กฎการกระจาย          | $A(B+C) = AB + AC$  |
| 19. | กฎการกระจาย          | $A+BC = (A+B)(A+C)$ |
-

# กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

## กฎการลดทอน (Absorptive Laws)

20.  $A + AB = A$

21.  $A(A+B) = A$

22.  $A(\bar{A} + B) = AB$



## พิสูจน์กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

- For the distributive law  $A+BC = (A+B)(A+C)$  Let's verify the expression with a truth table.

| A | B | C | BC | A+BC | A+B | A+C | (A+B)(A+C) |
|---|---|---|----|------|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |    |      |     |     |            |
| 0 | 0 | 1 |    |      |     |     |            |
| 0 | 1 | 0 |    |      |     |     |            |
| 0 | 1 | 1 |    |      |     |     |            |
| 1 | 0 | 0 |    |      |     |     |            |
| 1 | 0 | 1 |    |      |     |     |            |
| 1 | 1 | 0 |    |      |     |     |            |
| 1 | 1 | 1 |    |      |     |     |            |

# พิสูจน์กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

$$A + AB = A$$

Proof

$$F = A + A \cdot B$$

จากกฎข้อ 6  $A \cdot 1 = A$  แทน A

$$F = (A \cdot 1) + A \cdot B$$

$$F = (A + A)(1 + B)$$

จากกฎข้อ 3  $A + A = A$

$$F = (A)(1 + B)$$

จากกฎข้อ 2  $A + 1 = 1$

$$F = (A)(\cancel{1 + B}^1)$$

$$F = A$$

$$A(A+B) = A$$

Proof

## พิสูจน์กฎพื้นฐานพีชคณิตบูลีน

- $A + \bar{A}B = ?$

$$F = A + \bar{A}B$$

จากกฎข้อ 6  $A \cdot 1 = A$  แทน  $A$

$$F = (A \cdot 1) + \bar{A} \cdot B$$

จากกฎข้อ 2  $A + 1 = 1$

$$F = A \cdot (B + 1) + \bar{A} \cdot B$$

จากกฎข้อ 18  $A(B+C) = AB + AC$

$$F = AB + A + \bar{A} \cdot B$$

$$F = A + (AB + \bar{A} \cdot B)$$

$$F = A + B(A + \bar{A})$$

จากกฎข้อ 4  $A + \bar{A} = 1$

$$F = A + B(\cancel{A + \bar{A}}^1)$$

$$F = A + B$$

- $A(\bar{A} + B) = ?$

In summary, therefore,  $A + \bar{A}B = A + B$  and  $A(\bar{A} + B) = AB$

# Boolean Theorems

- $A(B+C) = (AB)+(AC)$  สามารถพิสูจน์ได้ด้วยตารางค่าความจริง ดังนี้

| A | B | C | B+C | A(B+C) | AB | AC | (AB)+(AC) |
|---|---|---|-----|--------|----|----|-----------|
| 0 | 0 | 0 |     |        |    |    |           |
| 0 | 0 | 1 |     |        |    |    |           |
| 0 | 1 | 0 |     |        |    |    |           |
| 0 | 1 | 1 |     |        |    |    |           |
| 1 | 0 | 0 |     |        |    |    |           |
| 1 | 0 | 1 |     |        |    |    |           |
| 1 | 1 | 0 |     |        |    |    |           |
| 1 | 1 | 1 |     |        |    |    |           |

การใช้พืชชนิดบุลินลดรูปสมการลอจิก



# การใช้พีชคณิตบูลีนลดรูปสมการลอจิก

ตัวอย่าง  $Y = BC + B\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$

จากกฎการกระจายข้อ 18  $A(B+C) = AB + AC$

$$Y = B(C + \bar{C}) + \bar{B}\bar{C}$$

จากกฎ OR ข้อ 4  $A + \bar{A} = 1$

$$\begin{aligned} Y &= B(\overset{1}{C + \bar{C}}) + \bar{B}\bar{C} \\ Y &= B \cdot 1 + \bar{B}\bar{C} \\ Y &= B + \bar{B}\bar{C} \end{aligned}$$

จากกฎการกระจายข้อ 19  $A+BC = (A+B)(A+C)$

$$Y = (B + \bar{B})(B + \bar{C})$$

จากกฎ OR ข้อ 4  $A + \bar{A} = 1$

$$\begin{aligned} Y &= (\overset{1}{B + \bar{B}})(B + \bar{C}) \\ Y &= 1 \cdot (B + \bar{C}) \end{aligned}$$

$$Y = B + \bar{C}$$

#Answer

การใช้พีชคณิตบูลีนลดรูปสมการลอจิก

- $Y = \overline{ABC} + \bar{A}BC + BC$



# ทฤษฎีของเดอมอร์แกน

เป็นทฤษฎีที่ช่วยลดรูปสมการที่ซับซ้อน

กฎข้อที่ 1 กล่าวว่า คอมพลิเมนต์ของผลบวกมีค่าเท่ากับผลคูณของคอมพลิเมนต์

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

กฎข้อที่ 2 กล่าวว่า คอมพลิเมนต์ของผลคูณมีค่าเท่ากับผลบวกของคอมพลิเมนต์

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

---

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

จงพิสูจน์กฎโดยใช้ตารางค่าความจริง

| A | B | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $\overline{A + B}$ | $\bar{A} \cdot \bar{B}$ |
|---|---|-----------|-----------|--------------------|-------------------------|
|   |   |           |           |                    |                         |
|   |   |           |           |                    |                         |
|   |   |           |           |                    |                         |
|   |   |           |           |                    |                         |

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

จงพิสูจน์กฎโดยใช้ตารางค่าความจริง

| A | B | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $\overline{A \cdot B}$ | $\bar{A} + \bar{B}$ |
|---|---|-----------|-----------|------------------------|---------------------|
|   |   |           |           |                        |                     |
|   |   |           |           |                        |                     |
|   |   |           |           |                        |                     |
|   |   |           |           |                        |                     |

ตัวอย่างการใช้ทฤษฎีของเดอมอร์แกนลดรูปสมการ

$$Y = \overline{A + BC}$$

จากโจทย์  $Y = \overline{A + BC}$

จากกฎข้อ 1  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$$Y = \bar{A} \cdot \overline{BC}$$

จากกฎข้อ 2  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

$$Y = \bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C})$$

---

ตัวอย่างการใช้ทฤษฎีของเดอมอร์แกนลดรูปสมการ

$$Y = \overline{(A + B + C)} \cdot D$$



# เอกสารอ้างอิง

บทที่ 3 พีชคณิตบูลีน. ค้นเมื่อ กันยายน 13, 2565 จาก <http://tps.comsci.info/algebra.pdf>

บทที่ 3 พีชคณิตบูลีน. ค้นเมื่อ กันยายน 13, 2565 จาก <https://www.g-tech.ac.th/vdo/ELECTRICdoc/วิชาช่าง/E-BOOK%20BASIC%20ELECTRIC%20AND%20ELECTRONICS/ดิจิตอลเบื้องต้น/บทที่%203%20พีชคณิตบูลีน.pdf>

---

